9 Parameterabhängige Integrale

Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Ist $f : I \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ist für jedes $x \in U$ die Funktion $f(\cdot, x) : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so kann man das Integral von f über die erste Variable als Funktion

$$\varphi : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^b f(t, x)dt$$

der freien Variablen $x \in U$ betrachten. Im Folgenden wollen wir Bedingungen an f angeben, unter denen die resultierende Funktion φ stetig ist oder gewünschte Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt.

Lemma 9.1. *Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : I \times D \to \mathbb{R},\ (t, x) \mapsto f(t, x)$ eine stetige Funktion. Sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $C(I) = \{g; g : I \to \mathbb{R}$ ist stetig$\}$ versehen mit der Norm*

$$\|g\|_I = \sup_{t \in I} |g(t)|.$$

Dann ist die Abbildung $D \to C(I),\ x \mapsto f(\cdot, x)$ stetig.

Beweis. Sei $x \in D$ und sei (x_k) eine Folge in D mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Wir nehmen an, dass die Folge $f(\cdot, x_k)$ in dem normierten Raum $C(I)$ nicht gegen $f(\cdot, x)$ konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge (z_k) von (x_k) mit $\|f(\cdot, z_k) - f(\cdot, x)\|_I > \epsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Supremumsnorm $\|\cdot\|_I$ gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $t_k \in I$ mit

$$|f(t_k, z_k) - f(t_k, x)| > \epsilon.$$

Da I kompakt ist, hat die Folge (t_k) nach Satz 3.8 eine konvergente Teilfolge

$$(t_{k_j}) \overset{(j\to\infty)}{\longrightarrow} t \in I.$$

Dann ist $\lim_j(t_{k_j}, z_{k_j}) = (t, x) = \lim_j(t_{k_j}, x)$ und wegen der Stetigkeit von f in $(t, x) \in I \times D$ würde folgen, dass

$$\epsilon < |f(t_{k_j}, z_{k_j}) - f(t_{k_j}, x)| \overset{(j\to\infty)}{\longrightarrow} |f(t, x) - f(t, x)| = 0.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war. Also konvergiert die Folge $(f(\cdot, x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(\cdot, x)$ in dem normierten Raum $C(I)$ für jede Folge (x_k) in D, die gegen $x \in D$ konvergiert. Damit ist die Stetigkeit der Abbildung $D \to C(I),\ x \mapsto f(\cdot, x)$ gezeigt (siehe Definition 2.7). □

Als Anwendung erhält man ein Stetigkeitskriterium für parameterabhänigige Integrale.

Korollar 9.2. *Seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : I \times D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$\varphi : D \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int_a^b f(t, x)dt$$

stetig.

Beweis. Versieht man $C(I)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_I$, so ist die Abbildung

$$D \to C(I),\ x \mapsto f(\cdot, x)$$

stetig nach Lemma 9.1. Als Beispiel zu Satz 2.18 haben wir gesehen, dass

$$C(I) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \int_a^b g\, dt$$

eine stetige lineare Abbildung ist. Nach Satz 2.8 ist φ als Komposition von zwei stetigen Abbildungen stetig. □

Wir versuchen, auf ähnliche Weise hinreichende Bedingungen für die Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale zu beweisen.

Lemma 9.3. *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und sei $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass*

(i) $f(t, \cdot) : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist für alle $t \in I$ und

(ii) $I \times J \to \mathbb{R},\ (t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ stetig ist.

Ist $y \in J$ und ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $J \setminus \{y\}$ mit $\lim_{k\to\infty} y_k = y$, so konvergiert

$$\frac{f(\cdot, y_k) - f(\cdot, y)}{y_k - y} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, y)$$

in dem normierten Raum $(C(I),\ \|\cdot\|_I)$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da die Funktion $\frac{\partial f}{\partial y} : I \times J \to \mathbb{R}$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(t', y') \right| < \epsilon$$

für alle $(t, y),\ (t', y') \in I \times J$ mit $\|(t, y) - (t', y')\| < \delta$. Zu $\delta > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|y_k - y| < \delta$ für alle $k \geq k_0$. Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 15.4 in [EAI]) gibt es für jedes $k \geq k_0$ und jedes $t \in I$ eine Stelle $\theta_{t,k}$ zwischen y und y_k so, dass

$$\left| \frac{f(t, y_k) - f(t, y)}{y_k - y} - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \theta_{t,k}) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| < \epsilon$$

gilt. Benutzt haben wir dabei auch, dass $\|(t, \theta_{t,k}) - (t, y)\| = |\theta_{t,k} - y| \leq |y_k - y| < \delta$ für $k \geq k_0$ ist. Folglich ist

$$\left\| \frac{f(\cdot, y_k) - f(\cdot, y)}{y_k - y} - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, y) \right\|_I < \epsilon$$

für alle $k \geq k_0$. □

Als Folgerung erhalten wir, dass unter den Voraussetzungen von Lemma 9.3 das über $t \in I$ gebildete Integral von f stetig differenzierbar von dem freien Parameter $y \in J$ abhängt.

Satz 9.4. *Seien $I = [a, b]$, $J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und sei $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass*

(i) $f(t, \cdot) : J \to \mathbb{R}$ *differenzierbar ist für alle $t \in I$ und*

(ii) $I \times J \to \mathbb{R},\ (t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ *stetig ist.*

Dann definiert $\varphi : J \to \mathbb{R},\ \varphi(y) = \int_a^b f(t, y)dt$ eine stetig differenzierbare Funktion auf J mit

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)dt$$

für alle $y \in J$.

Beweis. Da das Integral eine stetige lineare Abbildung

$$C(I) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \int_a^b g(t)dt$$

auf $C(I)$ (versehen mit der Supremumsnorm) definiert, folgt mit Lemma 9.3, dass für jedes $y \in J$ und für jede Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $J \setminus \{y\}$ mit $\lim_y y_k = y$ gilt

$$\frac{\varphi(y_k) - \varphi(y)}{y - y_k} = \int_a^b \frac{f(t, y_k) - f(t, y)}{y_k - y} dt \overset{(k \to \infty)}{\longrightarrow} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)dt.$$

Also ist φ differenzierbar in jedem $y \in J$ mit

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)dt.$$

Die Stetigkeit von $\varphi' : J \to \mathbb{R}$ folgt mit Korollar 9.2. $\square$

Satz 9.5. *Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : I \times U \to \mathbb{R}$ stetig so, dass*

(i) $f(t, \cdot)\ :\ U \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbar ist für alle $t \in I$ und*

(ii) die partiellen Ableitungen

$$I \times U \to \mathbb{R}, (t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, y) \quad (1 \leq i \leq n)$$

stetig sind.

Dann definiert $\varphi : U \to \mathbb{R},\ \varphi(y) = \int_a^b f(t, y)dt$ eine C^1-Funktion mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, y)dt \quad (i = 1, \ldots, n,\ y \in U).$$

Beweis. Die partielle Differenzierbarkeit und die behauptete Formel für die Ableitung folgen direkt aus Satz 9.4, indem man alle bis auf eine der y_i-Variablen festhält. Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} : U \to \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n)$ folgt aus der Integraldarstellung dieser Funktionen mit Korollar 9.2. $\square$

Durch wiederholte Anwendung des letzten Satzes erhält man ein Kriterium für die k-malige stetige partielle Differenzierbarkeit von parameterabhängigen Integralen.

Korollar 9.6. *Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}^*$ und $f : I \times U \to \mathbb{R}$ stetig so, dass*

(i) $f(t, \cdot) \in C^k(U)$ für alle $t \in I$ ist und

(ii) für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ die partielle Ableitung

$$I \times U \to \mathbb{R},\ (t, y) \mapsto \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(t, y)$$

stetig ist.

Dann definiert $\varphi : U \to \mathbb{R},\ \varphi(y) = \int_a^b f(t, y)dt$ eine C^k -Funktion mit

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial y^\alpha}(y) = \int_a^b \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(t, y)dt \quad (|\alpha| \leq k,\ y \in U).$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch Induktion nach k unter Anwendung von Satz 9.5. $\square$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v = (v_1, \ldots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld (Definition 5.7). Gibt es eine Funktion $f \in C^1(U)$ mit

$$v = \text{grad } f$$

auf U, so ist $f \in C^2(U)$ und mit dem Satz von Schwarz (Satz 5.11) folgt, dass

$$\partial_j v_i = \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f = \partial_i v_j \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Man nennt diese notwendige Bedingung auch die *Integrabilitätsbedingung* für das Vektorfeld v. Ist f eine Lösung der Gleichung $v = \text{grad } f$, so nennt man f ein *Potential* des Vektorfeldes v. Über hinreichend schönen Mengen hat auch umgekehrt jedes C^1-Vektorfeld, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt, ein Potential. Wir zeigen dies nur für den Fall, das U eine offene Kugel um 0 ist.

Satz 9.7. *Seien $r > 0,\ U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < r\}$ und $v : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld mit*

$$\partial_j v_i = \partial_i v_j \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Dann definiert $f : U \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 v_i(tx)dt \right) x_i$$

eine C^1-Funktion mit grad $f = v$ *auf U.*

Beweis. Die Funktionen

$$f_i : [0,1] \times U \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto v_i(tx) \quad (i = 1, \dots, n)$$

sind stetig und bei festem $t \in [0,1]$ nach der Kettenregel (Korollar 6.9) partiell differenzierbar nach x. Die partiellen Ableitungen

$$[0,1] \times U \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(tx)t$$

sind stetig als Funktionen in $(t,x) \in [0,1] \times U$ für $i, j = 1, \dots, n$. Nach Satz 9.5 sind die Funktionen

$$\varphi_i : U \to \mathbb{R},\ \varphi_i(x) = \int_0^1 v_i(tx)dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

stetig partiell differenzierbar. Also ist auch die im Satz definierte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und mit der Formel aus Satz 9.5 folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(tx)t\ dt \right) x_i + \int_0^1 v_j(tx)dt \\
&= \int_0^1 \left[\left(t \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(tx)x_i \right) + v_j(tx) \right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tv_j(tx))dt = v_j(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in U$ und $j = 1, \dots, n$. Dabei haben wir im vorletzten Schritt noch einmal die Kettenregel (Korollar 6.9) und im letzten Schritt den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung aus der Analysis I benutzt. □

Da die Funktion v in Satz 9.7 stetig differenzierbar ist, ist das in Satz definierte Potential f natürlich sogar eine C^2-Funktion. Man nennt eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig*, falls für alle $x \in U$ und $t \in [0,1]$ auch $tx \in U$ ist. Im obigen Beweis wurde nicht wirklich benutzt, dass U eine offene Kugel um 0 ist, sondern nur, dass U eine offene sternförmige Menge ist. Satz 9.7 bleibt also richtig, wenn U allgemeiner eine offene sternförmige Menge ist.

Korollar 9.8. *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, sternförmige Menge und $v : U \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gibt es eine Funktion $f \in C^1(U)$ mit $v = \operatorname{grad} f$ genau dann, wenn $\operatorname{rot} v = 0$ ist auf U.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 9.7 und den obigen Bemerkungen zu Satz 9.7. □

Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nach Korollar 9.2 sind die Funktionen

$$[a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_c^d f(x,y)dy,$$

$$[c,d] \to \mathbb{R},\ y \mapsto \int_a^b f(x,y)dx$$

stetig. Also existieren auch die beiden iterierten Integrale

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \text{ und } \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Satz 9.9. *Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$. Für jede stetige Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Beweis. Die Funktion $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \int_c^y f(x,t)dt$$

ist stetig, denn für $(x,y),\ (x_0,y_0) \in [a,b] \times [c,d]$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_c^y f(x,t)dt - \int_c^{y_0} f(x_0,t)dt \right| \\
\leq &\left| \int_{y_0}^y f(x,t)dt \right| + \left| \int_c^{y_0} (f(x,t) - f(x_0,t))dt \right| \\
\leq &|y - y_0| \ \|f\|_{[a,b]\times[c,d]} + |y_0 - c| \sup_{t \in [c,d]} |f(x,t) - f(x_0,t)|,
\end{aligned}$$

und beide Summanden in der letzten Zeile konvergieren gegen 0 für $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Man beachte dabei, dass f nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig ist. Da F partiell differenzierbar nach y ist und die partielle Ableitung

$$[a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

stetig ist, ist die Funktion

$$\varphi : [c,d] \to \mathbb{R};\ \varphi(y) = \int_a^b \left(\int_c^y f(x,t)dt \right) dx$$

nach Satz 9.4 stetig differenzierbar mit

$$\varphi'(y) = \int_a^b f(x,y)dx \quad (y \in [c,d]).$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d \varphi'(y)dy = \varphi(d) - \varphi(c) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir verallgemeinern den letzten Satz auf den Fall von n-fach iterierten Integralen.

Sei $Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu] \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader ($a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ mit $a_\nu < b_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$). Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig, so ist nach Korollar 9.2 auch die Funktion

$$\prod_{\nu=2}^n [a_\nu, b_\nu] \to \mathbb{R},\ (x_2, \ldots, x_n) \mapsto \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1$$

stetig. Aus demselben Grunde ist

$$\prod_{\nu=3}^{n}[a_\nu,b_\nu]\to\mathbb{R},\ (x_3,\dots,x_n)\mapsto\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)dx_1\right)dx_2$$

stetig. Nach n Schritten erhält man das *iterierte Riemann-Integral* von f

$$\int_{a_n}^{b_n}\dots\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n=\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\dots\left(\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\dots,x_n)dx_1\right)\dots dx_{n-1}\right)dx_n,$$

wobei die linke Seite als abkürzende Schreibweise für die rechte Seite gemeint ist. Wir bezeichnen mit $V(Q)=\prod_{\nu=1}^{n}(b_\nu-a_\nu)$ das *Volumen* von Q. Unter einer *Teilung* von Q versteht man ein Tupel $T=(T_1,\dots,T_n)$ aus Teilungen T_ν von $[a_\nu,b_\nu]$. Sei

$$T_\nu=(t_{\nu,i})_{0\le i\le r_\nu}\quad(\nu=1,\dots,n).$$

Wir nennen $\omega(T)=\max_{\nu=1,\dots,n}\omega(T_\nu)$ die *Spurweite* von T und definieren

$$\begin{aligned}
I &= I(T)=\prod_{\nu=1}^{n}\{1,\dots,r_\nu\},\\
\mathcal{T} &= \left\{\prod_{\nu=1}^{n}[t_{\nu,i_\nu-1},\ t_{\nu,i_\nu}];\ i=(i_1,\dots,i_n)\in I\right\},\\
Q(i,T) &= \prod_{\nu=1}^{n}[t_{\nu,i_\nu-1},\ t_{\nu,i_\nu}]\quad(i\in I).
\end{aligned}$$

Auch iterierte Riemann-Integrale lassen sich durch geeignete Riemann-Summen approximieren (vgl. Satz 16.11 in [EAI]).

Satz 9.10. *Sei $Q=\prod_{\nu=1}^{n}[a_\nu,b_\nu]$ ($a_\nu,b_\nu\in\mathbb{R}$ mit $a_\nu<b_\nu$ für $\nu=1,\dots,n$) ein abgeschlossener Quader und sei $f:Q\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*
Zu jedem $\epsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ so, dass für jede Teilung T von Q mit Spurweite $\omega(T)<\delta$ und jede Wahl von Punkten $\xi_i\in Q(i,T)$ ($i\in I(T)$) gilt

$$\left|\int_{a_n}^{b_n}\dots\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n-\sum_{i\in I(T)}f(\xi_i)V(Q(i,T))\right|<\epsilon.$$

Beweis. Wie im eindimensionalen Fall nennen wir die im Satz auftretende endliche Summe eine *Riemann-Summe* bezüglich der Teilung T und schreiben sie abkürzend als $S(f,T,(\xi_i)_{i\in I})$. Sei $\epsilon>0$. Da f nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta>0$ mit

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{V(Q)}$$

für alle $x,y\in Q$ mit $\|x-y\|<\delta$. Sei T eine Teilung von Q mit $\omega(T)<\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ und sei für jedes $i\in I=I(T)$

ein Punkt $\xi_i \in Q(i,T)$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\left|\int_{a_n}^{b_n}\dots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n - S(f,T,(\xi_i)_{i\in I})\right|\\ =&\left|\sum_{i\in I}\int_{t_{n,i_{n-1}}}^{t_{n,i_n}}\dots\int_{t_{1,i_1-1}}^{t_{1,i_1}}(f(x_1,\dots,x_n)-f(\xi_i))dx_1\dots dx_n\right|\\ \leq&\sum_{i\in I}\int_{t_{n,i_{n-1}}}^{t_{n,i_n}}\dots\int_{t_{1,i_1-1}}^{t_{1,i_1}}|f(x_1,\dots,x_n)-f(\xi_i)|dx_1\dots dx_n \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Man beachte dabei, das für $i \in I$ und $x \in Q(i,T)$ gilt

$$\|(x_1,\dots,x_n)-\xi_i\| \leq \sqrt{n}\ \|(x_1,\dots,x_n)-\xi_i\|_\infty \leq \sqrt{n}\ \omega(T) < \delta$$

(siehe Bemerkung 1.6) und daher $|f(x_1,\dots,x_n)-f(\xi)| < \frac{\epsilon}{V(Q)}$. □

Wir nennen eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen T_k des Quaders $Q=\prod_{\nu=1}^n[a_\nu,b_\nu]$ eine *Teilungen-Nullfolge*, falls $\lim_{k\to\infty}\omega(T_k)=0$ ist.

Korollar 9.11. *Seien Q und f wie in Satz 9.10. Ist $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilungen-Nullfolge von Q und ist für jedes $k\in\mathbb{N}$ und jeden Teilquader $R\in\mathcal{T}_k$ ein Punkt $\xi_{k,R}\in R$ gegeben, so gilt*

$$\int_{a_n}^{b_n}\dots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{R\in\mathcal{T}_k} f(\xi_{k,R})V(R).$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Satz 9.10. □

Wählt man eine andere Integrationsreihenfolge zur Definition des iterierten Riemann-Integrals

$$\int_{a_{\pi(n)}}^{b_{\pi(n)}}\left(\dots\left(\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x_1,\dots,x_n)dx_{\pi(1)}\right)\dots\right)dx_{\pi(n)},$$

wobei π eine Permutation von $\{1,\dots,n\}$ ist, so zeigt der Beweis von Satz 9.10, dass Korollar 9.11 richtig bleibt, wenn man das iterierte Riemann-Integral auf der linken Seite ersetzt, durch das in der neuen Integrationsreihenfolge berechnete Integral.

Korollar 9.12. *Sei $Q=\prod_{\nu=1}^n[a_\nu,b_\nu](a_\nu,b_\nu\in\mathbb{R}$ mit $a_\nu\leq b_\nu$ für $\nu=1,\dots,n)$ ein kompakter Quader und sei $f:Q\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für alle Permutationen $\pi:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$*

$$\int_{a_n}^{b_n}\dots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \int_{a_{\pi(n)}}^{b_{\pi(n)}}\left(\dots\left(\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x_1,\dots,x_n)dx_{\pi_{(1)}}\right)\dots\right)dx_{\pi(n)}.$$

Beweis. Der Beweis ist wie oben begründet eine direkte Konsequenz von Satz 9.10 und Korollar 9.11. □

Da das iterierte Riemann-Integral stetiger Funktionen auf kompakten Quadern unabhängig von der Integrationsreihenfolge ist, schreibt man in der Situation von Korollar 9.12 auch

$$\int_Q f dx = \int_Q f dx_1\dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n}\dots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n.$$

Korollar 9.13. *(Satz von Fubini) Seien $R \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Quader und sei $f : R \times Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_{R\times Q} f d(x,y) = \int_R \left(\int_Q f(x,y) dy \right) dx = \int_Q \left(\int_R f(x,y) dx \right) dy.$$

Beweis. Seien $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ und $Q = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_R \left(\int_Q f dy \right) dx &= \int_{a_m}^{b_m} \ldots \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{c_n}^{d_n} \ldots \int_{c_1}^{d_1} f(x_1, \ldots, x_m,\ y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n \right) dx_1 \ldots dx_m \\
&= \int_{c_n}^{d_n} \ldots \int_{c_1}^{d_1} \int_{a_m}^{b_m} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_m\ y_1, \ldots, y_n) dx_1 \ldots dx_m dy_1 \ldots dy_n \\
&= \int_{R\times Q} f d(x,y) = \int_Q \left(\int_R f(x,y) dx \right) dy,
\end{aligned}$$

wobei wir Korollar 9.12 benutzt haben. □

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2013.