UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Seminar zur Analysis

im Sommersemester 2015
Ausgewählte Kapitel aus der Maßtheorie

Grundlagen zur Maßtheorie

Auf diesem Vorbereitungsblatt sind einige Definitionen und wichtige Eigenschaften von Maßen und integrierbaren Funktionen zusammengestellt, die im Laufe des Seminars benötigt werden. Alle hier aufgenommenen Aussagen sind den Büchern [Coh80] und [Els11] entnommen. Ersteres bildet die Grundlage für dieses Seminar. Die unten aufgeführten Sätze und Lemmata sind mit Referenzen auf ihre Beweise in einem der beiden genannten Bücher versehen.

σ-Algebren und Maße

Definition 1. Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X heißt **σ-Algebra (auf X)**, falls

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) für jede Menge $A \in \mathcal{A}$ auch $A^c \in \mathcal{A}$ gilt und

(iii) für jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ auch $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ ist.

Ein solches Paar $(X, \mathcal{A})$ nennt man einen **Messraum** oder **messbaren Raum**.

Bemerkung 2. Aus den Punkten *(ii)* und *(iii)* folgt unter Verwendung der Gesetze von De Morgan aus der Mengentheorie, dass auch der Schnitt $\bigcap_{i\in I} A_i$ jeder Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ liegt.

Bemerkung 3. Ist X eine beliebige Menge und $\mathcal{A}_0$ ein System von Teilmengen von X, so gibt es nach [Coh80, Korollar 1.1.2] eine bezüglich Mengeninklusion kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X mit $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ heißt die **von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra (auf X)** und $\mathcal{A}_0$ heißt ein **Erzeuger von $\mathcal{A}$ (über X)**. In diesem Zusammenhang schreibt man $\sigma(\mathcal{A}_0)$ für $\mathcal{A}$.

Ist X ein topologischer Raum, so schreiben wir $\mathcal{B}(X)$ für die von den offenen Mengen von X erzeugte σ-Algebra auf X.

Definition 4. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Ein **Maß (auf X)** ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, die die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ und

(ii) μ ist ***σ*-additiv**, d.h. es gilt $\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$ für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$.

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nennt man einen **Maßraum**.

Bemerkung 5. Ist $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, so nennt man eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ **(endlich) additiv**, falls $\mu(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$ für jede endliche Familie $(A_k)_{k=0}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt.

Lemma 6 [Coh80, Prop. 1.2.1 und 1.2.2]**.** *Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und A, B, A_n $(n \in \mathbb{N})$ Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$. Dann gilt*

(i) $\mu(A) \leq \mu(B)$,

(ii) $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, *falls* $\mu(A) < \infty$ *und*

(iii) $\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$.

Lemma 7 [Coh80, Prop. 1.2.3]**.** *Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum. Dann gilt:*

*(i) μ ist **stetig von unten**, d.h. für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ mit $A_k \subseteq A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

*(ii) μ ist **stetig von oben**, d.h. für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ mit $A_{k+1} \subseteq A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Lemma 8 [Coh80, 1.2.4]**.** *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Weiter sei $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine additive Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$. Ist darüber hinaus eine der beiden Bedingungen*

(i) μ ist stetig von unten,

(ii) für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ mit $A_{k+1} \subseteq A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \emptyset$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0,$$

erfüllt, so ist μ ein Maß.

Typischerweise konstruiert man Maße, indem man **äußere Maße** auf geeignete σ-Algebren einschränkt.

Definition 9. Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Ein **äußeres Maß** ist eine Abbildung $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, die die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) μ^* ist **monoton**, d.h. es gilt $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ für alle $A, B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$ und

(iii) μ^* ist **σ-subadditiv**, d.h. für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von X gilt
$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Definition 10. Es sei $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **μ^*-messbar**, falls die Gleichung
$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c)$$
für alle $Q \subset X$ erfüllt ist.

Satz 11 [Coh80, Theorem 1.3.4]**.** *Ist $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß, so ist*
$$M_{\mu^*} = \big\{A \subseteq X \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\big\}$$
eine σ-Algebra und $\mu^*|_{M_{\mu^*}}$ ist ein Maß.

Messbare und integrierbare Funktionen

Definition 12. Es seien $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ messbare Räume. Dann heißt eine Funktion $f\colon X \to Y$ **$(\mathcal{A},\mathcal{B})$-messbar**, falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ gilt.

Lemma 13. *Es seien $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ messbare Räume und $\mathcal{B}_0$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}$ über Y. Dann ist eine Funktion $f\colon X \to Y$ genau dann $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}_0$ gilt.*

Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Dann definiert
$$\overline{\mathcal{B}} = \big\{B \cup E \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), E \subseteq \{-\infty,+\infty\}\big\}$$
eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$. Wir nennen eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ **messbar**, wenn sie $(\mathcal{A},\overline{\mathcal{B}})$-messbar ist. Entsprechend nennen wir eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ **messbar**, falls $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ $(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbar sind.

Für die folgenden Ausführungen beachte man auch die Anmerkungen in [Els11, Abschnitt III.1, S.104f]. Für den Rest dieses Abschnitts sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

Lemma 14 [Els11, Satz III.4.2]**.** *Für eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist messbar.*

(ii) *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\big\{x \in X \mid f(x) > \alpha\big\} \in \mathcal{A}$.*

(iii) *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\big\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\big\} \in \mathcal{A}$.*

(iv) *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\big\{x \in X \mid f(x) < \alpha\big\} \in \mathcal{A}$.*

(v) *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\big\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\big\} \in \mathcal{A}$.*

Lemma 15 [Els11, Sätze III.4.3 und III.4.7]**.** *Es seien $f, g, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ($n \in \mathbb{N}$) messbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind die Funktionen $\alpha f + \beta g$, fg, $|f|$ und*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad x \longmapsto \sup\big\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\big\}$$

sowie die auf analoge Weise definierten Abbildungen $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar.

Beispiel 16.

(a) Für $A \subset X$ ist die Funktion

$$\chi_A\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$ gilt.

(b) Sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $A \in \mathcal{A}$, so ist die Abbildung

$$h\colon X \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ g(x) & , x \notin A \end{cases}$$

messbar.

(c) Es seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist die Funktion

$$f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(x)$$

messbar. Eine solche Funktion nennen wir **einfach**.

(d) Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion, so nennt man die nichtnegativen, messbaren Abbildungen

$$f^+\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad x \longmapsto \max\{f(x), 0\}$$

und

$$f^-\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad x \longmapsto \max\{-f(x), 0\}$$

den **Positiv-** bzw. **Negativteil** von f.

Lemma 17 [Coh80, Prop. 2.1.7]**.** *Zu jeder nichtnegativen, messbaren Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer, einfacher Funktionen $f_n\colon X \to [0,\infty)$ mit*

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

für alle $x \in X$

Für den Rest dieses Abschnitts sei $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß auf dem messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$. Wir setzen

$$\mathcal{T}^+ = \big\{f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist einfach mit } f(X) \subseteq [0,\infty)\big\}.$$

Definition 18. Es seien $f \in \mathcal{T}^+$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,\infty)$ mit $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$. Dann heißt die Zahl

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) \in [0,\infty)$$

das **μ-Integral von f**.

Man beachte, dass die Zahl $\int_X f\, d\mu$ aus obiger Definition nicht von der speziellen Darstellung der Funktion $f \in \mathcal{T}^+$ durch die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ und die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ abhängt (siehe hierzu [Coh80, S. 61f]).

Definition 19. Für eine nichtnegative, messbare Abbildung $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert man das **μ-Integral** duch

$$\int_X f\, d\mu = \sup\left\{ \int_X g\, d\mu \;\middle|\; g \in \mathcal{T}^+ \text{ mit } g \leq f\right\}$$

Für eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ wie in obiger Definition gilt

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{T}^+$ mit $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ (siehe [Coh80, Prop. 2.1.7], beachte auch Lemma 17).

Definition 20. Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige messbare Funktion, so nennt man f **μ-integrierbar** (oder **integrierbar bezüglich μ**), falls die beiden Integrale

$$\int_X f^+ \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_X f^- \, d\mu$$

endlich sind. In diesem Fall definiert man das **μ-integral** von f durch

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \, .$$

Man nennt eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ **μ-integrierbar**, falls die reellwertigen Abbildungen $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ μ-integrierbar sind. In diesem Fall ist das **μ-Integral** von f durch

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) \, d\mu$$

definiert.

Bemerkung 21. Ist $f \in \mathcal{T}^+$, so prüft man leicht nach, dass die μ-Integrale aus den Definitionen 18 und 19 (und 20, falls f μ-integrierbar ist) die gleiche Zahl repräsentieren. Entsprechend sind auch die μ-Integrale aus den Definitionen 19 und 20 für jede μ-integrierbare Funktion $f\colon X \to [0, \infty]$ gleich.

Im Folgenden sei $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\hat{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{R}}$.

Lemma 22 [Els11, Satz IV.3.6]**.** *Sind $f, g\colon X \to \hat{\mathbb{K}}$ μ-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ μ-integrierbar und es gilt*

$$\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu = \int_X \alpha f \, d\mu + \int_X \beta g \, d\mu$$

Lemma 23 [Els11, Satz IV.3.3 und IV.3.8]**.** *Für eine Funktion $f\colon X \to \hat{\mathbb{K}}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f ist μ-integrierbar.

(ii) f ist messbar und es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g\colon X \to [0, \infty]$ mit $|f| \leq g$.

(iii) f ist messbar und $|f|$ ist μ-integrierbar.

In diesem Fall gilt die Standardabschätzung

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu \, .$$

Lemma 24 [Coh80, Prop. 2.3.6]**.** *Sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$, so gilt*

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu \, .$$

Fast überall bestehende Eigenschaften

Für diesen Abschnitt sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 25.

- Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt **μ-Nullmenge**.
- Für jedes $x \in X$ sei $A(x)$ eine Aussage. Man sagt, dass **$A(x)$ für μ-fast alle $x \in X$** (oder **μ-fast überall**) gilt, falls eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert, sodass $A(x)$ wahr ist für alle $x \in X \setminus N$.

Lemma 26 [Coh80, Prop. 2.3.8]**.** *Es seien $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar mit $f(x) = g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$. Dann ist auch g μ-integrierbar und es gilt*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

Lemma 27 [Coh80, Prop. 2.3.11]**.** *Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $\int_X |f| \, d\mu = 0$, so folgt $f(x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$.*

Lemma 28 [Coh80, Kor. 2.3.12]**.** *Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar, so gilt $|f(x)| < \infty$ für μ-fast alle $x \in X$.*

Definition 29. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt **σ-endlich (bezüglich μ)**, falls es eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ gibt mit $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man nennt den Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (bzw. das Maß μ) **σ-endlich**, falls X σ-endlich bezüglich μ ist.

Lemma 30 [Coh80, Prop. 2.3.10]**.** *Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar, so ist die Menge $\big\{x \in X \mid f(x) \neq 0\big\}$ σ-endlich.*

Bemerkung 31. Die Aussage von Lemma 23 bleibt richtig, wann man Punkt (ii) durch

(ii') f ist messbar und es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g\colon X \to [0, \infty]$ mit $|f(x)| \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$.

ersetzt (siehe [Els11, Korollar IV.4.3]). Ebenso bleibt die Aussage von Lemma 24 richtig, wenn man die Gültigkeit der Ungleichung

$$f(x) \leq g(x)$$

nur für μ-fast alle $x \in X$ fordert (siehe [Els11, Satz IV.4.2 a)]).

Konvergenzsätze

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Satz von der monotonen Konvergenz

Satz 32 [Coh80, Theorem 2.4.1]**.** *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen $f_n \colon X \to [0, \infty]$ so, dass*

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

für μ-fast alle $x \in X$ gilt. Dann gilt

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Als unmittelbare Folgerung aus dem letzten Satz erhält man.

Korollar 33. *Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_n \colon X \to [0, \infty]$ gilt*

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Satz von der majorisierten Konvergenz

Satz 34 [Els11, Theorem 2.4.1]**.** *Die Funktionen $f, f_n \colon X \to \hat{\mathbb{K}}$ $(n \in \mathbb{N})$ seien messbar und es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für μ-fast alle $x \in X$. Außerdem gebe es eine μ-integrierbare Funktion $g \colon X \to [0, \infty]$ so, dass*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und μ-fast alle $x \in X$ gilt. Dann sind die Funktionen f_n $(n \in \mathbb{N})$ und f μ-integrierbar mit

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Literatur

[Coh80] Donald L Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[Els11] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 2011.