UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 1 Abgabetermin: Dienstag, 05.05.2015

Aufgabe 1 (1+2+2=5 Punkte)

Betrachten Sie folgende Metriken auf der reellen Achse:

$$d(x, y) = |x - y| \qquad \text{und} \qquad \tilde{d}(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

(a) Überprüfen Sie, dass $\tilde{d}$ tatsächlich eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d)$ und $(\mathbb{R}, \tilde{d})$ dieselben offenen Mengen besitzen.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \tilde{d})$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Räume und sei $f : X_1 \to X_2$ eine surjektive stetige Abbildung mit $d_1(x, y) \leq d_2(f(x), f(y))$ für alle $x, y \in X_1$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn X_1 vollständig ist, dann ist auch X_2 vollständig.

(b) Die Vollständigkeit von X_2 impliziert die Vollständigkeit von X_1.

(*Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 1 benutzen.*)

(bitte wenden)

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\emptyset \neq A \subset X$ bezeichne

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y);\ y \in A\}$$

den *Abstand* eines Elementes $x \in X$ zur Menge A.

Aufgabe 3 **(2+1+1+2=6 Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$d_A : X \to \mathbb{R};\ x \mapsto d(x, A)$$

stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass $d(x, A) = 0$ genau dann, wenn $x \in \overline{A}$ gilt.

(d) Seien jetzt $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ existiert mit $f|_{A_1} \equiv 0$ und $f|_{A_2} \equiv 1$.

Aufgabe 4 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge metrischer Räume und sei $X = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ das kartesische Produkt der Mengen X_n.

(a) Begründen Sie, dass durch

$$d : X \times X \to [0, \infty),\ d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

eine Metrik auf X definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass der metrische Raum (X, d) vollständig ist genau dann, wenn alle (X_n, d_n) vollständig sind.