UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 2 Abgabetermin: Dienstag, 12.05.2015

Sei X ein metrischer Raum. Eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen $A_i \subset X$ heißt *lokal endlich*, falls für jeden Punkt $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass die Menge $\{i \in I;\ A_i \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine lokal endliche Familie von Teilmengen eines metrischen Raumes X. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) vollständige metrische Räume, sei (X, d) ein weiterer metrischer Raum und seien $i_1 : X \to X_1$, $i_2 : X \to X_2$ isometrische Abbildungen mit dichtem Bild. Zeigen Sie: Es existiert eine eindeutig bestimmte isometrische Bijektion $\Phi : X_1 \to X_2$ mit $i_2 = \Phi \circ i_1$.

Aufgabe 7 (2+2=4 Punkte)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt und definiere für $x \in X$ die Abbildung

$$f_x \colon X \to \mathbb{R},\ t \mapsto d_X(x,t) - d_X(x_0,t).$$

Zeigen Sie:

(a) $j \colon X \to \ell^\infty(X),\ x \mapsto f_x$ ist eine Isometrie zwischen metrischen Räumen.

(b) Geben Sie einen alternativen Beweis für die Existenz der Vervollständigung von X.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum so, dass für jede Folge abgeschlossener Mengen $\emptyset \neq A_k \subset X$ mit $A_{k+1} \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\operatorname{diam}(A_k)(= \sup\{d(x,y);\ x,y \in A_k\}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ein $x \in X$ existiert mit $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{x\}$. Zeigen Sie, dass X vollständig ist.