UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 3 Abgabetermin: Dienstag, 19.05.2015

Aufgabe 9 (2+2=4 Punkte)

Sei K ein kompakter metrischer Raum und $\varphi\colon K \to K$ eine Abbildung mit

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x, y)$$

für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie:

(a) Jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge.

(b) Es gibt genau einen Punkt $x_0 \in K$ mit $\phi(x_0) = x_0$.
(*Hinweis: Betrachten Sie* $\inf\{d(\varphi(x), x);\ x \in K\}$.)

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Teilmengen $U_n \subset \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

(*Hinweis: Betrachten Sie außer den Mengen U_n auch die Mengen $V_q = \mathbb{R} \setminus \{q\}$ ($q \in \mathbb{Q}$) und wenden Sie den Satz von Baire an.*)

Aufgabe 11 (3+1=4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$U_n = \bigcup \left(U;\ U \subset \mathbb{R} \text{ offen mit } \operatorname{diam} f(U) < \frac{1}{n} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ist die Menge der reellen Zahlen, in denen f stetig ist.

(b) Es gibt keine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau in allen rationalen Zahlen stetig ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 12 **(4x1=4 Punkte)**

Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und seien $\emptyset \neq K \subset X$ kompakt und $\emptyset \neq A \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) $f(K) \subset Y$ ist kompakt.

(b) $K \subset X$ ist abgeschlossen.

(c) Ist $Y = \mathbb{R}$, so existieren $x_{min}, x_{max} \in K$ mit

$$f(x_{min}) = \inf f(K), \ \ f(x_{max}) = \sup f(K).$$

(d) Es ist $d(K, A) = \inf\{d(x,y);\ x \in K \text{und } y \in A\} > 0$.

Aufgabe 13* **(4 Punkte)**

Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes X. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt so, dass für jede Menge $A \subset X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \delta$ ein $i \in I$ existiert mit $A \subset U_i$.

(*Hinweis: Sonst gäbe es Mengen $A_n \subset X$ mit $\operatorname{diam}(A_n) < \frac{1}{n}$ so, dass A_n in keiner der Mengen U_i $(i \in I)$ enthalten ist. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 9 (a), dass dies nicht möglich ist.*)