UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 4 Abgabetermin: Dienstag, 26.05.2015

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Untersuchen Sie, ob die im folgenden definierten Mengensysteme $t_i \subset \mathcal{P}(X)$ $(i = 1, 2, 3)$ Topologien auf X bilden, und unter welchen Bedingungen diese Hausdorffsch sind:

$$\begin{aligned} U \in t_1 &\quad \Leftrightarrow \quad U = \emptyset \text{ oder } X \setminus U \text{ endlich,} \\ U \in t_2 &\quad \Leftrightarrow \quad U = \emptyset \text{ oder } X \setminus U \text{ abzählbar,} \\ U \in t_3 &\quad \Leftrightarrow \quad U = \emptyset \text{ oder } U = X \text{ oder } X \setminus U \text{ unendlich.} \end{aligned}$$

Aufgabe 14 (1+1+2=4 Punkte)

Sei (X, t) ein topologischer Raum und seien $\emptyset \neq Y \subset X$, $A \subset Y$ und $K \subset X$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) A ist abgeschlossen in $(Y, t|_Y)$ genau dann, wenn es eine abgeschlossene Menge $F \subset X$ gibt mit $A = F \cap Y$.

(b) A ist kompakt in $(Y, t|_Y)$ genau dann, wenn A kompakt in X ist.

(c) K ist kompakt genau dann, wenn $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ für jede Familie $(F_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Mengen F_i in $(K, t|_K)$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft gilt.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Seien X, Y topologische Räume, sei $X = A \cup B$ Vereinigung abgeschlossener oder offener Teilmengen und seien $f_A \colon A \to Y$, $f_B \colon B \to Y$ stetige Abbildungen (bezüglich der Relativtopologien von X) mit $f_A = f_B$ auf $A \cap B$. Zeigen Sie, dass

$$f \colon X \to Y,\ x \mapsto \begin{cases} f_A(x), & \text{falls } x \in A, \\ f_B(x), & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

eine stetige Abbildung ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 16 **(3×2=6 Punkte)**

Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge und I eine beliebige Indexmenge. Für $i \in I$ sei (X_i, t_i) ein topologischer Raum und $f_i\colon X_i \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Das Mengensystem

$$t = \{U \subset X;\ f_i^{-1}(U) \in t_i \text{für alle } i \in I\}$$

definiert eine Topologie auf X.
(Es handelt sich hierbei um die von den f_i $(i \in I)$ erzeugte *Finaltopologie*.)

(b) t ist die feinste Topologie auf X, bezüglich der die Abbildung $f_i\colon (X_i, t_i) \to (X, t)$ für alle $i \in I$ stetig ist.

(c) Ist (Y, τ) ein weiterer topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g\colon (X, t) \to (Y, \tau)$ genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ die Abbildung $g \circ f_i\colon (X_i, t_i) \to (Y, \tau)$ stetig ist.