UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 5 — Abgabetermin: Dienstag, 02.06.2015

Aufgabe 17 (2+2=4 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und seien t_1, t_2 Topologien auf X. Zeigen Sie:

(a) Sind $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von t_1, t_2, so gilt

$$t_1 \subset t_2 \;\Leftrightarrow\; \forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \; \forall x \in B_1 \; \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \text{ mit } x \in B_2 \subset B_1.$$

(b) Sind $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ Subbasen von t_1, t_2, so gilt

$$t_1 \subset t_2 \;\Leftrightarrow\; \forall S \in \mathcal{S}_1 \; \forall x \in S \; \exists S_1, \ldots, S_r \in \mathcal{S}_2 \text{ mit } x \in \bigcap_{i=1}^{r} S_i \subset S.$$

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Zeigen Sie, dass ein System $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X genau dann die Basis einer Topologie t auf X ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für jedes $x \in X$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$.

(b) Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und alle $x \in B_1 \cap B_2$ gibt es ein $B_0 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_0 \subset B_1 \cap B_2$.

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} t &= \{U \subset X \; ; \; \forall x \in U \; \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } x \in B \subset U\} \\ &= \bigcap \left(\mathcal{O} \; ; \; \mathcal{O} \text{ ist Topologie auf } X \text{ mit } \mathcal{B} \subset \mathcal{O}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 19 (1+1+2+2=6 Punkte)

Sei $\mathcal{B} = \{[a, b) \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie τ auf $\mathbb{R}$.

(b) Die gewöhnliche Topologie t auf $\mathbb{R}$ ist echt schwächer als τ.

(c) $(\mathbb{R}, \tau)$ ist separabel und erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

(d) $(\mathbb{R}, \tau)$ ist nicht metrisierbar.

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Sei (X, t) ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass (X, t) genau dann Hausdorffsch ist, wenn zu je zwei disjunkten kompakten Mengen $K_1, K_2 \subset X$ disjunkte offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ existieren mit $K_1 \subset U_1$ und $K_2 \subset U_2$.