UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 6 Abgabetermin: Dienstag, 09.06.2015

Aufgabe 21 **(1+1+2=4 Punkte)**

Seien (X_i, t_i) topologische Räume ($i \in I$) und sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie t versehen. Für $i \in I$ seien $A_i \subset X_i$ und $A = \prod_{i\in I} A_i \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Sind alle $A_i \subset X_i$ ($i \in I$) abgeschlossen, so ist auch $A \subset X$ abgeschlossen.

(b) Es gilt $\overline{A} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

(c) Es gilt $\mathrm{Int}(A) \subset \prod_{i\in I} \mathrm{Int}(A_i)$. Gilt im allgemeinen Gleichheit? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 22 **(3 Punkte)**

Sei σ die von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R},\ a < b$) erzeugte Topologie auf $\mathbb{R}$ (vergleiche Aufgabe 19) und sei

$$(\mathbb{R}^2, \tau) = (\mathbb{R}, \sigma) \times (\mathbb{R}, \sigma)$$

das topologische Produkt. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \tau)$ ein separabler topologischer Raum ist, dass aber die Menge

$$D = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Relativtopologie $\tau|_D$ nicht separabel ist.

Aufgabe 23 **(1+3=4 Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) Sei (X, t) ein toplogischer Raum und sei $\mathcal{B}$ eine Basis von t. Hat $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis, so besitzt x eine abzählbare Umgebungsbasis, die nur Mengen aus $\mathcal{B}$ enthält.

(b) Topologische Produkte von überabzählbar vielen Hausdorffschen topologischen Räumen mit jeweils mindestens zwei Elementen sind nicht metrisierbar.

Aufgabe 24 **(4 Punkte)**

Seien (X_i, t_i) ($i \in \mathbb{N}$) separable topologische Räume. Zeigen Sie, dass $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ versehen mit der Produkttopologie ein separabler topologischer Raum ist.