UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 8 Abgabetermin: Dienstag, 23.06.2015

Aufgabe 29 (3×2=6 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Menge

$$X/\sim = \{[x]\ ;\ x \in X\}$$

der Äquivalenzklassen sei mit der Finaltopologie τ der Abbildung

$$q\colon X \to X/\sim,\ x \mapsto [x]$$

versehen (Aufgabe 25). Im Folgenden sei

$$R = \{(x, y) \in X \times X\ ;\ x \sim y\},$$

$X \times X$ sei mit der Produkttopologie versehen und $\pi_1, \pi_2 \colon X \times X \to X$ seien die Koordinatenprojektionen. Zeigen Sie:

(a) Ist τ Hausdorffsch, so ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen.

(b) q ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ die Menge

$$\pi_2(\pi_1^{-1}(A) \cap R) \subset X$$

abgeschlossen ist.
(*Hinweis: $F \subset X/\sim$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $q^{-1}(F) \subset X$ abgeschlossen ist.*)

(c) Ist X ein kompakter Hausdorffraum und ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen, so ist q abgeschlossen.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Es sei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie und

$$X = \prod_{A \subset \mathbb{N}} \{0, 1\} = \left\{(x_A)_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}\ ;\ x_A \in \{0, 1\}\right\}$$

mit der Produkttopologie versehen. Der Satz von Tychonoff liefert, dass X kompakt ist. Zeigen Sie, dass X nicht folgenkompakt ist.
(*Hinweis: Nehmen Sie an, dass die durch*

$$x_A^{(n)} = 1 :\Leftrightarrow n \in A \text{ und die Anzahl der Elemente von } \{k \in A; k < n\} \text{ ist gerade}$$

definierte Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ hätte und betrachten Sie die Menge $A = \{n_k; k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.)

(bitte wenden)

Aufgabe 31 **(4 Punkte)**

Sei X eine beliebige Menge und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_k\colon X \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k(x)\| < \infty$$

für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass ein Teilnetz $(f_{k_\alpha})_{\alpha\in A}$ der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ existieren derart, dass für alle $x \in X$ gilt $\lim_\alpha f_{k_\alpha}(x) = f(x)$.

(*Hinweis: Betrachten Sie $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als Folge in einem kompakten topologischen Produkt.*)

Aufgabe 32 **(4 Punkte)**

Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz stetiger Funktionen $f_\alpha\colon X \to \mathbb{R}$, das punktweise monoton wachsend gegen eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass das Netz $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ gleichmäßig auf X gegen f konvergiert.

(*Hinweis: Betrachten Sie für jedes feste $\varepsilon > 0$ die Mengen $U_\alpha = \{x \in X\ ;\ f(x) - f_\alpha(x) < \varepsilon\}$ $(\alpha \in A)$.*)

Aufgabe 33* **(4 Punkte)**

Für $i \in I$ seien (X_i, t_i) topologische Räume und $\emptyset \neq Y_i \subset X_i$ Teilräume versehen mit den Relativtopologien $t_i|_{Y_i}$. Das Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ sei mit der Produkttopologie t der t_i versehen. Zeigen Sie, dass die Relativtopologie $t|_Y$ von t auf den Teilraum $Y = \prod_{i\in I} Y_i \subset X$ die Produkttopologie der $t_i|_{Y_i}$ ist.