UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 9 Abgabetermin: Dienstag, 30.06.2015

Aufgabe 34 **(2×2=4 Punkte)**

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen X und Y und sei $B \subset Y$ beliebig. Zeigen Sie:

(a) Ist f abgeschlossen, so gibt es für jede offene Menge $U \supset f^{-1}(B)$ eine offene Menge $V \supset B$ mit $f^{-1}(V) \subset U$.

(b) Ist f offen, so gibt es für jede abgeschlossene Menge $F \supset f^{-1}(B)$ eine abgeschlossene Menge $G \supset B$ mit $f^{-1}(G) \subset F$.

Aufgabe 35 **(4 Punkte)**

Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, für die

$$R = \{(x, y) \in X \times X \; ; \; x \sim y\} \subset X \times X$$

abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass $X/\sim$ versehen mit der Topologie τ aus Aufgabe 29 ein kompakter Hausdorffraum ist.

(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 29 (c) und Aufgabe 34 (a)*)

Aufgabe 36 **(1+1+2=4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass Teilräume von topologischen Hausdorffräumen (mit der Relativtopologie) stets wieder Hausdorffsch sind.

Sei X nun ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei $\emptyset \neq Y \subset X$ mit der Relativtopologie versehen. Zeigen Sie:

(b) Ist $Y \subset X$ offen oder abgeschlosssen, so ist Y lokalkompakt.

(c) Y ist genau dann lokalkompakt, wenn es eine offene Menge $U \subset X$ und eine abgeschlossene Menge $F \subset X$ mit $Y = U \cap F$ gibt.

(*Hinweis: Falls Y lokalkompakt ist, kann man zeigen, dass $Y \subset \overline{Y}$ offen ist.*)

(bitte wenden)

Für lokalkompakte Räume X, Y heißt eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ *eigentlich*, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset Y$ auch $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt ist.

Aufgabe 37 **(2+2=4 Punkte)**

Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume mit den Einpunktkompaktifizierungen $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ und $\hat{Y} = Y \cup \{\infty\}$.

(a) Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann eigentlich ist, wenn die durch

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X, \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

definierte Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to \hat{Y}$ von f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede eigentliche Abbildung $f\colon X \to Y$ abgeschlossen ist.