UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 10 Abgabetermin: Dienstag, 07.07.2015

Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Für $A \subset X$ bezeichne $\sim_A$ die durch

$$x \sim_A y \quad :\Leftrightarrow \quad x = y \text{ oder } x, y \in A$$

definierte Äquivalenzrelation auf X.

Aufgabe 38 (3×2=6 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$ abgeschlossen. Zeigen Sie:

(a) $q\colon X \to X/_{\sim_A},\ x \mapsto [x]$ ist abgeschlossen.

(b) Ist X regulär, so ist $X/_{\sim_A}$ mit der Topologie τ aus Aufgabe 29 ein Hausdorffscher topologischer Raum.

(c) Ist X normal, so ist $(X/_{\sim_A}, \tau)$ ein normaler topologischer Raum.
(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 29 (b) und Aufgabe 34 (a).*)

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und seien $K \subset X$ kompakt und $U \subset X$ offen mit $K \subset U$. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(f) \subset U$ existiert, so dass $f|_K \equiv 1$ ist.
(*Hinweis: Laut Vorlesung gibt es eine offene Menge $V \subset X$ mit kompaktem Abschluss, so dass $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ ist. Wenden Sie Urysohns Lemma auf $K, \partial V \subset \overline{V}$ an.*)

Aufgabe 40 (2+3=5 Punkte)

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei $K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt offene, relativ kompakte Mengen $V_1, \ldots, V_n \subset X$ mit $K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$ und $\overline{V_i} \subset U_i$ für $1 \leq i \leq n$.

(b) Es gibt stetige Funktionen $f_1, \ldots, f_n\colon X \to [0,1]$ mit kompakten Trägern, so dass $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$ für alle $x \in K$ gilt.
(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 39.*)

(bitte wenden)

Ein lokalkompakter Hausdorffraum heißt *abzählbar im Unendlichen*, falls er abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen ist.

Aufgabe 41 (3+1=4 Punkte)

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum mit Einpunktkompaktifizierung $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) X ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn es eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen in X gibt, so dass

  (i) $\overline{U_n}$ kompakt für alle $n \in \mathbb{N}$,

  (ii) $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

  (iii) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

  (*Hinweis: Korollar 7.10.*)

(b) X ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn der Punkt ∞ eine abzählbare Umgebungsbasis in $\hat{X}$ besitzt.