UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung Topologie

Sommersemester 2015

Blatt 11 Abgabetermin: Dienstag, 14.07.2015

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X heißt *G_δ-Menge (F_σ-Menge)*, falls sie Durchschnitt (Vereinigung) von abzählbar vielen offenen (abgeschlossenen) Teilmengen von X ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Sei X ein normaler topologischer Raum und seien $A, B \subset X$ abgeschlossene disjunkte Mengen in X. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f^{-1}(\{0\}) = A$ und $f(B) = \{1\}$, wenn $A \subset X$ eine G_δ-Menge ist.

(*Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Urysohn und eine geeignete Funktionenreihe.*)

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein kompakter Hausdorffraum X genau dann metrisierbar ist, wenn er das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}^*$ und sei X ein kompakter Hausdorffraum so, dass jeder Punkt $x \in X$ homöomorph zu einer offenen Menge im $\mathbb{R}^m$ ist. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl N und eine topologische Einbettung (=Homöomorphismus aufs Bild) $f\colon X \to \mathbb{R}^N$ gibt.

(*Hinweis: Wählen Sie eine offene Überdeckung $(U_i)_{i=1}^n$ von X, so dass Homöomorphismen $g_i\colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^m$ existieren, und benutzen Sie eine stetige Zerlegung der Eins bezüglich $(U_i)_{i=1}^n$, um eine injektive stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^{n+nm}$ zu konstruieren.*)

Ein topologischer Hausdorffraum X heißt *vollständig regulär*, falls zu jeder abgeschlossenen Menge $F \subset X$ und jedem $x \in X \setminus F$ eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ existiert mit $f(x) = 0$ und $f|_F \equiv 1$.

Aufgabe 45 (1+2+2=5 Punkte)

Sei X ein topologischer Hausdorffraum. Zeigen Sie:

(a) Ist X vollständig regulär, so ist X regulär.

(b) Ist X vollständig regulär, so ist auch jeder Teilraum $Y \subset X$ (versehen mit der Relativtopologie) vollständig regulär.

(c) X ist genau dann vollständig regulär, wenn X homöomorph zu einem Teilraum eines kompakten topologischen Hausdorffraums ist.
(*Hinweis: Betrachten Sie die Menge*

$$\mathcal{C} = \{f\colon X \to [0,1]\ ;\ f \text{ stetig}\}$$

und die Abbildung

$$j\colon X \to \prod_{\mathcal{C}} [0,1],\ x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{C}}\,.)$$