



Übungen zur Vorlesung Topologie
Sommersemester 2015

Blatt 12

Abgabetermin: Dienstag, 21.07.2015

Ein topologischer Raum X heißt *total unzusammenhängend*, falls $\mathcal{C}(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$ gilt. Hierbei sei $\mathcal{C}(x)$ die Zusammenhangskomponente von x in X

Aufgabe 46

(1+1+2=4 Punkte)

Sei (X, t) ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

- (a) Ist $t = \mathcal{P}(X)$ die diskrete Topologie, so ist X total unzusammenhängend.
- (b) Ist X total unzusammenhängend und lokal zusammenhängend, so gilt $t = \mathcal{P}(X)$.
- (c) $\mathbb{Q}$ versehen mit der Relativtopologie von $\mathbb{R}$ ist total unzusammenhängend, aber nicht diskret.

Zwei Teilmengen A, B eines topologischen Raums heißen *getrennt*, falls $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 47

(4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$ zwei nichtleere, zusammenhängende Mengen in X . Zeigen Sie, dass $A \cup B$ genau dann zusammenhängend ist, wenn A, B nicht getrennt sind.

Aufgabe 48

(3 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Untersuchen Sie, ob X mit der Topologie

$$t = \{U \subset X ; U = \emptyset \text{ oder } X \setminus U \text{ endlich}\}$$

zusammenhängend ist.

Aufgabe 49

(2+2=4 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

- (a) Ist $A \subset X$, so gilt für jede zusammenhängende Teilmenge $Y \subset X$

$$Y \cap A \neq \emptyset \text{ und } Y \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \Rightarrow Y \cap \partial A \neq \emptyset.$$

- (b) X ist genau dann zusammenhängend, wenn für alle $\emptyset \neq A \subsetneq X$ gilt: $\partial A \neq \emptyset$.

(bitte wenden)

Aufgabe 50***(2*+4*=6* Punkte)**

Sei (X, t) ein lokalkompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie:

- (a) Ist X separabel und metrisierbar, so ist X abzählbar im Unendlichen.

(*Hinweis: Satz von Lindelöf*)

- (b) Äquivalent sind:

- (i) t hat eine abzählbare Basis,
- (ii) X ist separabel und metrisierbar,
- (iii) $\hat{X}$ ist metrisierbar,
- (iv) X ist abzählbar im Unendlichen und metrisierbar.