



Übungen zur Vorlesung Topologie
Sommersemester 2015

Blatt 13

Abgabetermin: Dienstag, 28.07.2015

Aufgabe 51

(4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Welche der folgenden Implikationen gelten (Beweis oder Gegenbeispiel)?

- (a) A ist zusammenhängend $\Leftrightarrow \text{Int}(A)$ ist zusammenhängend.
- (b) A ist zusammenhängend $\Leftrightarrow \overline{A}$ ist zusammenhängend.
- (c) A ist zusammenhängend $\Leftrightarrow \partial A$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 52

(4 Punkte)

Sei G eine topologische Gruppe, das heißt eine Gruppe versehen mit einer Hausdorffschen Topologie so, dass die Abbildungen

$$G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy; \quad G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$$

stetig sind. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponente G_0 des neutralen Elements $e \in G$ ein abgeschlossener Normalteiler in G ist.

Aufgabe 53

(4 Punkte)

Sei X ein kompakter Hausdorffraum und sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge zusammenhängender abgeschlossener Teilmengen von X mit $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset X$$

zusammenhängend ist.

(Hinweis: Sonst gäbe es disjunkte offene Mengen $U, V \subset X$ mit $K \subset U \cup V$ und $K \cap U \neq \emptyset \neq K \cap V$. Betrachten Sie $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (K_n \cap (U \cup V)^c)$.)

Aufgabe 54

(4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass genau dann $f \equiv 0$ ist, wenn

$$\int_a^b f(x) x^k \, dx = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 55***(4* Punkte)**

Sei X ein kompakter Hausdorffraum und sei $C(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ stetig}\}$ mit der durch

$$d(f, g) = \|f - g\|_{\infty, X} \quad (f, g \in C(X))$$

definierten Metrik d versehen. Zeigen Sie:

$$X \text{ ist metrisierbar} \Leftrightarrow C(X) \text{ ist separabel.}$$

(Hinweis: Für „ $\Rightarrow$ “ wählen Sie eine dichte Teilmenge $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ von X und betrachten die von den Funktionen $d(\cdot, x_n)$ und den konstanten Funktionen erzeugte Teilalgebra von $C(X)$).

Für „ $\Leftarrow$ “ definieren Sie eine abzählbare Basis der Topologie von X mit Hilfe von Funktionen f_n aus einer dichten Teilmenge $\{f_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset C(X)$.)