



Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis
Sommersemester 2016

Blatt 1

Abgabetermin: Mittwoch, 04.05.2016

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte, konvexe Menge. Zeigen Sie, dass K polynom-konvex ist. (*Hinweis: Beweis von Korollar 5.7.*)

Für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^n$ bezeichne $P(K)$ die Algebra aller stetigen Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{C}$, für die es eine Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Polynomen $p_k \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ gibt mit $\|f - p_k\|_{\infty, K} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass K als Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ polynom-konvex ist. (*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ ist. Beweisen Sie dann, dass $\tilde{K} = K$ ist. Sie dürfen benutzen, dass $P(L) = C(L)$ für jedes Kompaktum $L \subset \mathbb{R}^n$ ist (Satz von Stone-Weierstraß).*)

Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ heißt polynomieller Polyeder, falls Ω die Gestalt $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|p(z)\|_{\infty} < 1\}$ mit einem endlichen Tupel $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^m$ hat.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie, dass Ω Rungesch ist genau dann, wenn es eine Folge polynomieller Polyeder $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) gibt so, dass

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie eine kompakte Ausschöpfung und Lemma 7.3.*)

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Zeigen Sie:

$$K \text{ polynom-konvex} \implies \mathbb{C}^n \setminus K \text{ zusammenhängend.}$$

Gilt auch die umgekehrte Inklusion? Beweis oder Gegenbeispiel!

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss16/ft3>