UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis

Sommersemester 2016

Blatt 3 Abgabetermin: Mittwoch, 18.05.2016

Aufgabe 8 **(2+2 = 4 Punkte)**

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $u\colon K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig. Zeigen Sie:

(a) u ist nach oben beschränkt und nimmt sein Supremum auf K an.

(b) Es existiert eine punktweise monoton fallende Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $u_k\colon K \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x) \qquad (x \in K).$$

(*Hinweis: Betrachten sie die Funktionen* $u_k(x) = \sup_{y\in K}(u(y) - k|x-y|)$.)

Aufgabe 9 **(4 Punkte)**

Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Für $a \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$ gilt

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt.$$

(*Hinweis: Cauchysche Integralformel.*)

Aufgabe 10 **(4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch und $a \in \Omega$, $r > 0$ mit $u(a) > -\infty$ und $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie die Aufgaben 8(b) und 9 sowie den folgenden Satz (Sie müssen diesen Satz nicht beweisen).* ***Satz****(10.2.3 in [Lorenz]): Seien* $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. *Zu jeder stetigen Funktion* $h\colon \partial D_r(a) \to \mathbb{R}$ *existiert eine stetige Funktion* $H\colon \overline{D}_r(a) \to \mathbb{R}$ *so, dass* $h = H|_{\partial D_r(a)}$ *gilt und* $H|_{D_r(a)}$ *harmonisch ist.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 11* **(3* + 3* = 6* Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig. Zu jedem $a \in \Omega$ gebe es ein $r(a) > 0$ mit $\overline{D}_{r(a)}(a) \subset \Omega$ und

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt \qquad (0 < r < r(a)).$$

Hierbei sei das Integral als $-\infty$ definiert, falls der Integrand nicht integrabel ist. Zeigen Sie für $\emptyset \neq K \subset \Omega$ kompakt und $h\colon K \to \mathbb{R}$ stetig mit $u \leq h$ auf ∂K und $h|_{\mathrm{Int}(K)}$ harmonisch die folgenden Aussagen:

(a) Die Menge

$$M = \left\{ z \in K \;\middle|\; (u-h)(z) = \sup_{w \in K} (u-h)(w) \right\}$$

ist kompakt und nicht leer. (*Hinweis: Aufgabe 8(a).*)

(b) Wäre $u - h > 0$ auf M, so wäre $M \subset \mathrm{Int}(K)$ und zu jedem $b \in \partial M$ gäbe es ein $r > 0$ mit

$$(u-h)(b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u-h)(b + re^{it})dt < (u-h)(b).$$

Folgern Sie, dass u subharmonisch ist. Benutzen Sie dabei, das Ergebnis von Aufgabe 9.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss16/ft3