UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis

Sommersemester 2016

Blatt 5 Abgabetermin: Mittwoch, 01.06.2016

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Seien $K \subset \mathbb{C}^n$ und $L \subset \mathbb{C}^m$ polynom-konvexe Kompakta. Zeigen Sie, dass $K \times L \subset \mathbb{C}^{n+m}$ polynom-konvex ist.

Aufgabe 16 (2+1+2 = 5 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $g, h \in \mathcal{O}(U)$ mit $g|_{Z(h)} \equiv 0$ und $(\partial_\nu h(z))_{1 \leq \nu \leq n} \neq 0$ für alle $z \in Z(h)$. Zeigen Sie:

(a) Zu $a \in Z(h)$ existiert eine biholomorphe Abbildung $f \colon V \to W$ von einer offenen Umgebung $V \subset U$ von a auf einen offenen Polyzylinder $W \subset \mathbb{C}^n$ um 0 mit $h \circ f^{-1}(z) = z_n$ für alle $z \in W$. (*Hinweis: Beweis von Satz 3.2*)

(b) Für $z = (z', z_n) \in W$ mit $z_n \neq 0$ ist

$$(g/h) \circ f^{-1}(z) = \frac{1}{z_n} \int_{[0,z_n]} \partial_n (g \circ f^{-1})(z', \xi) d\xi.$$

(c) Es gibt eine eindeutige Funktion $G \in \mathcal{O}(U)$ mit $G(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ für alle $z \in U \setminus Z(h)$. (*Hinweis: Riemannscher Hebbarkeitssatz.*)

Sei $A \subset U$ analytisch in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$. Eine Funktion $f \colon A \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, *wenn zu jedem $\alpha \in U$ eine offene Umgebung U_α von α und ein $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ existieren mit $f = f_\alpha$ auf $A \cap U_\alpha$.*

Aufgabe 17 (3+2 = 5 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $H^1(C^\infty(U), \overline{\partial}) = 0$. Seien $h \in \mathcal{O}(U)$ eine Funktion mit $(\partial_\nu h(z))_{1 \leq \nu \leq n} \neq 0$ für alle $z \in Z(h)$ und $f \colon Z(h) \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{\alpha \in U} U_\alpha$ und Funktionen $f_\alpha, h_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ mit

$$f_\beta - f_\alpha = h(h_\beta - h_\alpha) \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta \quad \text{ und } f_\alpha = f \text{ auf } U_\alpha \cap Z(h)$$

für alle $\alpha, \beta \in U$. (*Hinweis: Aufgabe 16.*)

(b) Es gibt eine Funktion $F \in \mathcal{O}(U)$ mit $f = F|_{Z(h)}$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss16/ft3