



Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis

Sommersemester 2016

Blatt 7

Abgabetermin: Mittwoch, 15.06.2016

Aufgabe 21

(4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $(a_k)_{k \geq 1}$ eine Abzählung einer diskreten Teilmenge $S \subset U$. Für $k \in \mathbb{N}^*$ sei

$$R_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}}{(z - a_k)^j} \quad (c_{kj} \in \mathbb{C}, c_{km_k} \neq 0).$$

Benutzen Sie die Lösbarkeit eines geeigneten Cousin-I-Problems, um eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus S)$ zu konstruieren, die in jedem der Punkte a_k einen Pol mit Hauptteil R_k besitzt.

(Hinweis: Benutzen Sie eine Überdeckung der Form $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$, $U_0 = U \setminus S$, $U_k = D_{r_k}(a_k)$ ($k \geq 1$).)

Aufgabe 22

(2 + 2 = 4 Punkte)

Seien $D \subset \mathbb{C}^n$ eine offene, konvexe Menge, $a \in D$ und $f \in \mathcal{O}(D)$. Zeigen Sie:

(a) Für $z \in D$ gilt

$$f(z) = f(a) + \sum_{j=1}^n (z_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z_j}(a + t(z - a)) dt.$$

(b) Benutzen Sie Teil (a) um zu zeigen, dass $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{O}(D)$ existieren mit

$$f(z) = f(a) + \sum_{j=1}^n (z_j - a_j) g_j(z) \quad (z \in D).$$

Aufgabe 23

(4 Punkte)

Seien $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}^n$ abgeschlossen und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen $A_j \subset \mathbb{C}^n$ mit $A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}(K, A_j) = \text{dist}(K, A).$$

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss16/ft3>