Vorbereitungsblatt

Auf dem folgenden Handout erinnern wir an einige Sätze und Definitionen aus der Funktionalanlysis, die im Seminar gebraucht werden. Die Nummerierung bezieht sich dabei auf das Funktionalanalysisskript von Prof. Dr. Jörg Eschmeier aus dem Wintersemester 2015/2016.

Definition 5.5. (a) Eine K-Algebra A zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt *normierte Algebra*, falls

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

ist für alle $x, y \in A$.

(b) Eine normierte Algebra, deren Norm vollständig ist heißt *Banachalgebra*.

(c) Eine *unitale normierte Algebra* (oder Banachalgebra) ist eine normierte Algebra (Banachalgebra) mit Einselement $1 \in A$ so, dass $\|1\| = 1$.

Beispiel 5.7. (a) Ist X ein kompakter Hausdorffraum, so ist $C(X)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_X$ eine kommutative unitale Banachalgebra.

(b) Ist E ein Banachraum, so sind $L(E)$ und $K(E)$ zusammen mit der Operatornorm Banachalgebren.

Definition 5.8. Sei A eine unitale Banachalgebra über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Für $a \in A$ nennt man

$$\sigma(a) = \{\lambda \in K \ ; \ \lambda 1 - a \text{ ist nicht inverteierbar in } A\}$$

das *Spektrum* von $a \in A$. Das Komplement $\rho(a) = K \setminus \sigma(a)$ heißt die *Resolventenmenge* von a und die Funktion

$$\rho(a) \to A, \ \lambda \mapsto R(\lambda, a) = (\lambda 1 - a)^{-1}$$

bezeichnet man als die *Resolventenfunktion* von a. Wir schreiben

$$A^{-1} = \{x \in A \ ; \ x \text{ ist invertierbar in } A\}$$

für die Menge der invertierbaren Elemente in A.

Statt $\lambda 1 - a$ werden wir im Folgenden einfach $\lambda - a$ schreiben.

Lemma 5.9. *Sei A eine unitale Banachalgebra über K. Dann gilt:*

(a) Für $a \in A$ mit $\|a\| < 1$ ist $1 - a$ invertierbar in A mit

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \text{ (Neumannsche Reihe).}$$

(b) *Die Menge* $A^{-1} \subset A$ *ist offen und die Abbildung*

$$A^{-1} \to A^{-1},\ x \mapsto x^{-1}$$

ist ein Homöomorphismus.

(c) *Für* $a \in A$ *ist* $\sigma(a) \subset K$ *kompakt und* $\sigma(a) \subset \{\lambda \in K\ ;\ |\lambda| \leq \|a\|\}$.

(d) *Für* $a \in A$ *ist die Resolventenfunktion* $\rho(a) \to A,\ \lambda \mapsto R(\lambda, a)$ *stetig und erfüllt die Resolventengleichung*

$$R(\lambda, a) - R(\mu, a) = (\mu - \lambda)R(\mu, a)R(\lambda, a)$$

für alle $\lambda, \mu \in \rho(a)$. *Insbesondere gilt*

$$\lim_{\lambda \to \mu} \frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\lambda - \mu} = -R(\mu, a)^2$$

für alle $\mu \in \rho(a)$.

(e) *Für* $a \in A$ *und* $\lambda \in K$ *mit* $|\lambda| > \|a\|$ *gilt*

$$R(\lambda, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} \to 0$$

für $|\lambda| \to \infty$, *wobei die Reihe für jedes* $r > \|a\|$ *gleichmäßig für* $|\lambda| \geq r$ *konvergiert.*

Bemerkung 5.10. Ist A eine unitale komplexe Banachalgebra, so ist

$$\sigma(a) \neq \emptyset.$$

Sei A eine normierte Algebra. Wir bezeichnen eine Linearform $\lambda\colon A \to K$ als multiplikativ, falls $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$ für alle $x, y \in A$ gilt und schreiben

$$\Delta_A = \{\lambda\ ;\ \lambda\colon A \to K \text{ ist eine multiplikative Linearform mit } \lambda \neq 0\}$$

für die Menge der nicht-trivialen Linearformen auf A. Ist A unital, so ist eine multiplikative Linearform $\lambda\colon A \to K$ genau dann nicht das Nullfunktional, wenn $\lambda(1) = 1$ ist.

Korollar 7.6. *Sei* A *eine unitale Banachalgebra über dem Körper* $K = \mathbb{R}$ *oder* $K = \mathbb{C}$. *Dann ist*

$$\Delta_A = \{\lambda\ ;\ \lambda\colon A \to K \textit{ ist eine multiplikative Linearform mit } \lambda(1) = 1\} \subset A^{'}$$

eine τ_{w^*}*-kompakte Teilmenge des topologischen Dualraums* $A^{'}$ *von* A.

Lemma 10.1. *Sei* A *eine (unitale) Banachalgebra und sei* $I \subsetneq A$ *ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist die Quotientenalgebra* A/I *bezüglich der Quotienetennorm* $\|a + I\| = \operatorname{dist}(a, I)$ *eine (unitale) Banachalgebra.*

Korollar 13.7 (Spektraler Abbildungssatz)**.** *Für $x \in A$ und eine analytische Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ auf einer offenen Menge $U \supset \sigma(x)$ gilt*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)).$$

Definition 13.9. Für $x \in A$ nennt man die Zahl

$$r(x) = \sup\{|z| \; ; \; z \in \sigma(x)\}$$

den *Spektralradius* von x.

Korollar 13.10. *Für $x \in A$ gilt*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}.$$

Sei im Folgenden H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

Definition 14.1. Unter einer C^*-Algebra versteht man eine Banachalgebra A über $\mathbb{C}$ zusammen mit einer *Involution*, das heißt einer Abbildung $A \to A, \; a \mapsto a^*$ mit

$$(a+b)^* = a^* + b^*, \; (\alpha a)^* = \overline{\alpha} a^*, \; (ab)^* = b^* a^*, \; a^{**} = a \quad (a, b \in A, \alpha \in \mathbb{C})$$

für die außerdem gilt

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad (a \in A).$$

Bemerkung 14.2. (a) In einer C^*-Algebra A gilt

$$\|a^*\| = \|a\|$$

für alle $a \in A$. Insbesondere ist $A \to A, \; a \mapsto a^*$ stetig. Enthält A ein Einselement, so ist $1^* = 1$.

(b) $L(H)$ mit der kanonischen Involution ist eine C^*-Algebra mit Eins. Allgemeiner ist jede norm-abgeschlossene Teilalgebra $A \subset L(H)$ mit

$$T^* \in A$$

für alle $T \in A$ eine C^*-Algebra (etwa $K(H) \subset L(H)$).

(c) Ist X ein kompakter Hausdorffraum, so ist $C(X)$ mit der Norm $\|f\| = \|f\|_X$ $(f \in C(X))$ und der Involution

$$\overline{f}(x) = \overline{f(x)} \quad (f \in C(X), x \in X)$$

eine kommutative C^*-Algebra mit Eins.

Definition 14.3. Sei A eine C^*-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt

(i) *selbstadjungiert*, falls $a = a^*$ ist,

(ii) *normal*, falls $aa^* = a^* a$ ist,

(iii) *unitär*, falls A eine Eins hat und $aa^* = a^* a = 1$ ist.

Wir betrachten zunächst normale und selbstadjungierte Elemente in C^*-Algebren etwas genauer.

Lemma 14.4. *Sei A eine C^*-Algebra.*

(a) Ist $a \in A$ normal, so ist $r(a) = \|a\|$ (vergleiche Definition 13.9).

(b) Ist $a = a^* \in A$, so ist $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

Lemma 14.5. *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und sei $a \in A$ normal. Dann ist*

$$C^*(a) = \bigcap (\; B \; ; \; B \subset A \text{ norm- und } * \text{-abgeschlossene Teilalgebra mit } a, 1 \in B \;)$$

eine kommutative C^*-Algebra (bezüglich der induzierten Involution).

Lemma 14.6. *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und sei $B \subset A$ eine unitale C^*-Unteralgebra, (das heißt eine $*$-abgeschlossene, norm-abgeschlossene Unteralgebra mit $1 \in B$). Dann gilt für alle $x \in B$*

$$\sigma_A(x) = \sigma_B(x).$$

Satz 14.7. *Sei A eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Eins und sei*

$$\Delta_A = \{\lambda \; ; \; \lambda \neq 0 \text{ ist multiplikative Linearform auf } A\}$$

der Strukturraum von A definiert wie in Korollar 7.6. Dann gilt für alle $x \in A$

$$\sigma(x) = \{\lambda(x) \; ; \; \lambda \in \Delta_A\}.$$

Satz 14.8. *Sei A eine kommutative unitale Banachalgebra über $\mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) Ist $M \subset A$ ein maximales Ideal, so ist $M \subset A$ abgeschlossen mit $\dim_{\mathbb{C}}(A/M) = 1$.

(b) Ist $A \setminus \{0\} = A^{-1}$, so ist $A = \mathbb{C}1$ (Satz von Gelfand-Mazur).

(c) Die Abbildung

$$\Delta_A \to \mathcal{M}(A) = \{M \; ; \; M \subset A \text{ maximales Ideal}\}, \; \lambda \mapsto \ker(\lambda)$$

ist eine Bijektion.

Korollar 14.11. *Sei A eine unitale C^*-Algebra und sei $a \in A$ normal. Dann gilt für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$*

$$\sigma(p(a, a^*)) = \{p(z, \overline{z}) \; ; \; z \in \sigma(a)\}.$$

Lemma 14.12. *Sei A eine unitale C^*-Algebra und sei $a \in A$ normal. Dann ist*

$$\mathcal{P} = \{f \in C(\sigma(a)) \; ; \text{ es gibt ein } p \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \text{ mit } f(z) = p(z, \overline{z}) \text{ für alle } z \in \sigma(a)\}$$

eine dichte Teilalgebra von $C(\sigma(a))$ bezüglich $\| \cdot \|_{\sigma(a)}$ und

$$\Phi_0 \colon \mathcal{P} \to A, \; \Phi_0(f) = p(a, a^*), \text{ falls } p \text{ wie oben zu } f \text{ gewählt ist,}$$

ist ein isometrischer Algebrenhomomorphismus.

Satz 14.13 (Stetiger Funktionalkalkül für normale Elemente)**.** *Sei A eine unitale C^*-Algebra und sei $a \in A$ normal. Dann gibt es eine eindeutige stetige lineare Abbildung $\Phi\colon C(\sigma(a)) \to A,\ f \mapsto \Phi(f)$ mit*

$$\Phi(f) = \Phi_0(f)$$

für alle $f \in \mathcal{P}$. Diese Abbildung ist ein isometrischer Algebrenhomomorphismus mit $\Phi(C(\sigma(a))) = C^*(a)$. Sei $f(a) = \Phi(f)$ für $f \in C(\sigma(a))$. Dann gilt:

(i) $\overline{f}(a) = f(a)^*$ und

(ii) $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$

für alle $f \in C(\sigma(a))$.

Bemerkung 14.14. (a) Für $A = L(H)$ und $T \in L(H)$ normal liefert Satz 14.13 den $C(\sigma(T))$-*Funktionalkalkül* für normale Operatoren auf Hilberträumen.

(b) Die Abbildung Φ aus Satz 14.13 ist auch der eindeutige isometrische $*$-Isomorphismus $C(\sigma(a)) \to C^*(a)$ (das heißt der isometrische Algebrenisomorphismus mit $\Phi(\overline{(f)}) = \Phi(f)^*$ für alle $f \in C(\sigma(a))$) mit

$$\Phi(1) = 1 \quad \text{und} \quad \Phi(\mathrm{id}) = a.$$

Satz 14.15. *Sei A eine unitale C^*-Algebra und sei $a \in A$ normal. Dann ist*

(i) $a = a^*$ genau dann, wenn $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ ist,

(ii) a unitär genau dann, wenn $\sigma(a) \subset \mathbb{T}$ ist,

(iii) $a = a^*$ und $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$ genau dann, wenn es ein Element $b \in A$ mit $b = b^*$ und $b^2 = a$ gibt. (Hierfür schreibt man abgekürzt $a \geq 0$.)