die maximale Lösung von (**) und

$$y : (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}) \to \mathbb{R}, \quad y(t) = t\,z(t) = t \tan(\ln t)$$

definiert die maximale Lösung von (*).

§5 Numerische Lösungsmethoden für gewöhnliche DG'en

A Die meisten Anfangswertprobleme lassen sich nicht explizit lösen.

Alternative: Approximative Berechnung von Lösungen mit numerischen Methoden

Voraussetzungen dafür:

- Es muss eine eindeutige Lösung existieren (Picard-Lindelöf = 4.8)
- Kleine Fehler in den Eingabedaten dürfen nur zu kleinen Änderungen der Lösungen führen.

Betrachte ein AWP

$$(*) \quad y' = f(t,y), \quad y(t_0) = \gamma \qquad (f \in C^1(G,\mathbb{R}^n),\ G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \text{ offen})$$

Nach Satz 4.8 (und Lemma 4.5) gibt es $\forall \gamma \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige maximale Lösung

$$y_\gamma : J(\gamma) \to \mathbb{R}^n$$

von (*) auf einem offenen Intervall $J(\gamma) \subset \mathbb{R}$. Hierbei sei $J(\gamma) = \emptyset$ für $(t_0,\gamma) \notin G$. Seien

$$\Omega := \{(t,\gamma)\,;\ \gamma \in \mathbb{R}^n \text{ und } t \in J(\gamma)\},$$

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad (t,\gamma) \mapsto y_\gamma(t).$$

Man nennt Φ den Fluss der Differentialgleichung.

Man kann zeigen (Theorem 18.8 in [S. Lang, Analysis I]):

Satz 5.1 Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^p(G, \mathbb{R}^n)$ mit $p \in \{1, 2, ..\} \cup \{\infty\}$.
Dann ist $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist eine C^p-Funktion.
Insbesondere ist Φ stetig.

Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes hängen die Lösungen φ_y stetig vom Anfangswert $y \in \mathbb{R}^n$ ab (im folgenden Sinne):

Folgerungen 5.2 Hat das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad (f \in C^1(G, \mathbb{R}^n),\ G \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ offen})$$

eine Lösung $\varphi_{y_0} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow$ $[a,b] \times \{y_0\} \subset \Omega$), so gibt es ein $r > 0$ mit

(1) $\quad [a, b] \subset J(y) \quad \forall y \in B_r(y_0)$.

In diesem Fall gilt

(2) $$\lim_{y \to y_0} \sup_{t \in [a,b]} \| \varphi_y(t) - \varphi_{y_0}(t) \| = 0$$

Ideen zu

(1) Sonst gäbe es $\forall k \geq 1$ ein Paar

$$(t_k, y_k) \in [a, b] \times B_{\frac{1}{k}}(y_0) \text{ mit } t_k \notin J(y_k) \quad (\Leftrightarrow (t_k, y_k) \notin \Omega)$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge erreicht man, dass

$$(t_k) \xrightarrow{k} t_0 \in [a, b]$$

$$\Rightarrow (t_k, y_k) \xrightarrow{k} (t_0, y_0) \in \Omega$$

$$\underset{\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ offen}}{\Longrightarrow} \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } (t_k, y_k) \in \Omega \ \forall k \geq k_0 \ \lightning$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass ein $r > 0$ mit (1) existiert.

(2) Sei $r > 0$ wie in (1) gewählt.

Dann ist $K := [a,b] \times \bar{B}_{r/2}(y_0) \subset \Omega$ und $\Phi|_K$ ist als stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta \in]0, \frac{r}{2}[$ mit

$$\|y_Y(t) - y_{Y_0}(t)\| = \|\Phi(t,Y) - \Phi(t,Y_0)\| < \varepsilon \quad \forall\, t \in [a,b]\ \forall\, Y \in B_\delta(Y_0)$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [a,b]} \|y_Y(t) - y_{Y_0}(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall\, Y \in B_\delta(Y_0). \quad \blacksquare$$

B Das explizite Euler-Verfahren

Gegeben sei wieder ein AWP

$$(*) \quad y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

mit einer Funktion $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Sei $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $(*)$ mit $a = t_0$ und sei

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$$

ein Gitter mit Abständen $h_j = t_{j+1} - t_j \quad (j = 0, \ldots, N-1)$.

Gesucht: Eine Verfahrensfunktion (Inkrementfunktion)

$$\Phi : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,c] \to \mathbb{R}^n, \quad (t,y,h) \mapsto \Phi(t,y,h),$$

für die die rekursiv durch

$$y_{j+1} := y_j + h_j\, \Phi(t_j, y_j, h_j) \quad (j = 0, \ldots, N-1)$$

definierten Vektoren y_j die wirklichen Werte $y(t_j)$ der Lösung an den Stellen t_j möglichst gut approximieren. Man bezeichnet

$$\max_{j=0,\ldots,N} \|y_j - y(t_j)\|$$

als den globalen Fehler des Verfahrens.

Die wirklichen Werte der Lösung erfüllen die Gleichungen

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + h_j \, \frac{y(t_j+h_j) - y(t_j)}{h_j} \quad (j=0,\dots,r-1).$$

Die Differenzen

$$\tau(t,h) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, y(t), h) \quad \left(\begin{array}{l} t \in [a,b], \\ h>0 \text{ klein genug} \end{array}\right)$$

nennt man die <u>lokalen Diskretisierungsfehler</u> des Verfahrens Φ.

(Man beachte, dass die maximale Lösung des AWP's (*) auf einem offenen Intervall $J(y_0) \supset [a,b]$ definiert ist).

Das Maximum

$$h_{max} := \max_{j=0,\dots,r-1} h_j \qquad (h_j = t_{j+1} - t_j)$$

heißt <u>Schrittweite</u> des Gitters $(t_j)_{j=0}^{r}$.

<u>Definition 5.3</u> (a) Das Verfahren Φ heißt <u>konsistent</u>, wenn

$$\lim_{h \downarrow 0} \tau(t,h) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

bzw. <u>konsistent von der Ordnung</u> $p \geq 1$, falls $K, h_0 > 0$ existieren mit

$$\|\tau(t,h)\| \leq K h^p \quad \forall t \in [a,b] \ \forall h \in [0, h_0].$$

(b) Man sagt, das Verfahren <u>besitzt die Konvergenzordnung</u> $p \geq 1$, falls Konstanten $C>0, h_0>0$ existieren so, dass

$$\max_{j=0,\dots,r} \|y_j - y(t_j)\| \leq C\, h_{max}^p$$

für alle Gitter $(t_j)_{j=0}^{r}$ mit Schrittweite $h_{max} < h_0$ gilt.

Für Verfahrensfunktionen Φ, die Lipschitz in y gleichmäßig in (t,h) sind, ist die Konvergenzordnung mindestens so gut wie die Konsistenzordnung.

Im Beweis des nächsten Satzes benutzen wir, dass für endlich viele reelle Zahlen $x_1, \dots, x_r \geq 0$ die Abschätzung

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_r) \leq e^{x_1}\cdots e^{x_r} = e^{x_1+\dots+x_r}$$

gilt.

<u>Satz 5.4</u> Sei $\Phi : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,c] \to \mathbb{R}^n$ eine Verfahrensfunktion so, dass ein $L > 0$ existiert mit

$$\| \Phi(t,y,h) - \Phi(t,\tilde{y},h) \| \leq L \| y - \tilde{y} \| \quad \forall (t,h) \in [a,b] \times [0,c] \; \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n .$$

Hat Φ die Konsistenzordnung $p \geq 1$, so hat Φ auch die Konvergenzordnung p.

<u>Beweis</u>. Nach Definition von $\tau(t_j, h_j)$ und der Folge (y_j) gilt für $j = 0, \dots, r-1$

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + h_j \Phi(t_j, y(t_j), h_j) + h_j \tau(t_j, h_j),$$

$$y_{j+1} = y_j + h_j \Phi(t_j, y_j, h_j).$$

Seien K, h_0 zu τ gewählt wie in Def. 5.3(a). Indem man die zweite Gleichung von der ersten abzieht, die Lipschitz-Bedingung für Φ und die Abschätzung von τ aus Def. 5.3(a) benutzt, erhält man für alle Gitter $(t_j)_{j=0}^r$ mit Schrittweite $h_{max} < h_0$

$$\begin{aligned}
\| y(t_{j+1}) - y_{j+1} \| &\leq (1+h_jL) \| y(t_j) - y_j \| + h_j K h_{max}^p \\
&\leq (1+h_jL)(1+h_{j-1}L) \| y(t_{j-1}) - y_{j-1} \| + (1+h_jL) h_{j-1} K h_{max}^p + h_j K h_{max}^p \\
&\leq \dots \\
&\leq (1+h_jL)(1+h_{j-1}L)\cdots(1+h_0L) \overbrace{\| y(t_0) - y_0 \|}^{=0} \\
&\quad + (1+h_jL)\cdots(1+h_1L) h_0 K h_{max}^p \\
&\quad + \dots \\
&\quad + h_j K h_{max}^p \\
&\leq e^{L\left(\sum_{i=1}^{j} h_i\right)} \left(\sum_{i=0}^{j} h_i \right) K h_{max}^p \leq \left(e^{L(b-a)} (b-a) K \right) h_{max}^p .
\end{aligned}$$

Also hat Φ die Konvergenzordnung p. $\blacksquare$

<u>Beispiel 5.5</u> (Expliziten Euler-Verfahren)

Betrachte ein AWP der Form

$$(*) \qquad y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0.$$

mit einer C^1-Funktion $f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall). Sei $y: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $(*)$ auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset I$ mit $a = t_0$. Beim <u>expliziten Euler-Verfahren</u> wählt man die Verfahrensfunktion

$$\Phi: [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi(t,y,h) = f(t,y).$$

Das Verfahren ist konsistent mit Ordnung $p=1$. Denn:

<u>Picard-Lindelöf = Satz 4.8</u> $\Rightarrow$ y hat eine Fortsetzung zu einer Lösung

$$y: \mathcal{J} = [a-\varepsilon, b+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n, \; t \mapsto y(t) = (y_i(t))_{i=1}^n \quad (\varepsilon > 0 \text{ geeignet}).$$

Da f C^1 ist und $y'(t) = f(t, y(t))$ $\forall t \in \mathcal{J}$ gilt, ist $y \in C^2(\mathcal{J})$ nach der Kettenregel.

Seien $t \in [a,b]$ und $0 < h < \varepsilon$. Nach dem Satz über die Taylorentwicklung (<u>Satz und Korollar 13.1.1</u>) gibt es für $i = 1, \dots, n$ Zwischenstellen $\xi_i \in]t, t+h[\subset \mathcal{J}$ mit

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h y_i'(t) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_i)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\tau(t,h)}{h} \right\| = \frac{1}{h} \left\| \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - f(t, y(t)) \right\|$$

$$= \frac{1}{h^2} \| y(t+h) - y(t) - h y'(t) \|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| (y_i''(\xi_i))_{i=1}^n \right\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \left\| (y_i''(\xi_i))_{i=1}^n \right\|_\infty$$

$$\leq \frac{\sqrt{n}}{2} \max_{i=1,\dots,n} \left(\sup_{\xi \in \mathcal{J}} |y_i''(\xi)| \right) =: K.$$

Also ist $\quad \|\tau(t,h)\| \leq K h \quad \forall t \in [a,b] \; \forall h \in (0, \varepsilon).$

Mit Satz 5.4 folgt:

Erfüllt f eine globale Lipschitz-Bedingung in y der Form

$$(*) \quad \| f(t,y) - f(t,\tilde{y}) \| \leq L \| y - \tilde{y} \| \quad \forall t \in [a,b] \ \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n,$$

so hat das explizite Euler-Verfahren auch Konvergenz-Ordnung $p = 1$.

(Nach Satz 1.7(b) ist dies erfüllt, wenn die Funktionen

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i,j = 1,\dots,n)$$

beschränkt sind)

C Verfahren höherer Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Lösung von

$$(*) \quad y' = f(t,y) \ , \ y(t_0) = y_0$$

auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset I$ mit $a = t_0$. Jedes Verfahren mit einer Verfahrensfunktion $\Phi : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,h_0] \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(t,y,h) = a_1 f(t,y) + a_2 f\big((t,y) + (b_1 h, b_2 h f(t,y))\big),$$

wobei $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$ Konstanten sind mit

$$a_1 + a_2 = 1 \ , \quad a_2 b_1 = a_2 b_2 = \tfrac{1}{2}$$

besitzt Konsistenzordnung $p = 2$.

Idee für $n = 1$: Sei wieder

$$y : J = [a-\varepsilon, b+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$$

eine Fortsetzung von y zu einer Lösung von $(*)$ auf ein größeres Intervall.

Für $t \in [a,b]$ und $0 < h < \frac{\varepsilon}{b_1}$ folgt mit Taylorentwicklung von f im Punkt $(t, y(t))$ mit Restglied 2. Ordnung (Satz 17.3.1)

$$a_2\, f\Big((t,y(t)) + (b_1 h,\, b_2 h\, f(t,y(t))) \Big) = a_2\, f(t,y(t))$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[(\partial_t f)(t,y(t))\, \cancel{b}_1 h + (\partial_y f)(t,y(t))\, \cancel{b}_2 h\, f(t,y(t)) \Big]$$
$$+ \underbrace{a_2 \Big[\sum_{|\alpha|=2} (\partial^\alpha f)(\dots)\, \big(b_1 h,\, b_2 h\, f(t,y(t))\big)^\alpha \Big]}_{=\, \mathcal{O}(h^2)},$$

wobei die Funktionen $\partial^\alpha f$ $(|\alpha|=2)$ ausgewertet werden in einer geeigneten Zwischenstelle

$$(t,y(t)) + \theta\, (b_1 h,\, b_2 h\, f(t,y(t))) \qquad (0 \le \theta \le 1).$$

$$\Rightarrow\ \Phi(t,y(t),h) = a_1\, f(t,y(t)) + a_2\, f\Big((t,y(t)) + (b_1 h,\, b_2 h\, f(t,y(t))) \Big)$$
$$= f(t,y(t)) + \frac{h}{2} \Big[\underbrace{(\partial_t f)(t,y(t)) + (\partial_y f)(t,y(t))\, f(t,y(t))}_{\overset{KR}{=}\ \frac{d}{dt} f(t,y(t)) \,=\, y''(t)} \Big] + \mathcal{O}(h^2)$$

Da $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $y'(t) = f(t,y(t))\ \forall t \in J$ gilt, ist $y \in C^3(J, \mathbb{R}^n)$.

Mit Taylorentwicklung von y im Pkt t mit Restglied 3. Ordnung folgt

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{1}{h}\Big[y'(t)\, h + y''(t) \frac{h^2}{2} + y'''(t+\theta h) \frac{h^3}{6} \Big]$$
$$= f(t,y(t)) + \frac{h}{2} y''(t) + \mathcal{O}(h^2).$$

Mit der Definition des lokalen Diskretisierungsfehlers erhält man

$$\tau(t,h) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t,y(t),h) = \mathcal{O}(h^2).$$

__Beispiele 5.6__ Wählt man

(a) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$,

so erhält man das __modifizierte Euler-Verfahren__

$$\Phi(t,y,h) = f\Big(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2} f(t,y) \Big) \quad (t \in [a,b],\ y \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le h < h_0)$$

(b) $\quad a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \quad , \; b_1 = b_2 = 1 \, ,$

so erhält man das <u>Verfahren von Heun</u>

$$\Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, \, y + h\, f(t,y))\right].$$

Sei $f \in C^\infty(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Lösung von

$$y' = f(t,y) \; , \; y(t_0) = y_0 .$$

Man kann zeigen, dass das Verfahren

$$\Phi(t,y,h) = \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] \quad (t \in [a,b], \, y \in \mathbb{R}^n, \, 0 \le h < h_0)$$

mit

$$k_1 = f(t,y) \quad , \quad k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, \, y + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, \, y + \frac{h}{2} k_2\right) \quad , \; k_4 = f(t+h, \, y + h k_3)$$

(<u>klassisches Runge-Kutta-Verfahren</u>) die Konsistenzordnung $p = 4$ hat

D Mehrschrittverfahren

Gegeben sei ein AWP

(*) $\quad y' = f(t,y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$

mit einer C^1-Funktion $f: I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ($I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall)

Sei $y: [a,b] \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung von (*) auf $[a,b] \subset I$ und sei

$$(t_i)_{i=0}^n = (a+ih)_{i=0}^n$$

ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$.

Bei einem m-Schrittverfahren benutzt man eine Beziehung der Form

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i y_{j+i} = h\,\Phi(t_j, y_j, \dots, y_{j+m}, h) \qquad (j = 0, \dots, n-m)$$

mit $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, $\alpha_m \neq 0$, und einer Verfahrensfunktion

$$\Phi : [a,b] \times (\mathbb{R}^N)^{m+1} \times [0,h_0] \to \mathbb{R}^N,$$

um die Näherungen $y_j \approx y(t_j)$ zu berechnen.

Idee: Zur näherungsweisen Berechnung von $y_{j+m} \approx y(t_{j+m})$ benutzt man nicht nur die letzte Näherung $y_{j+m-1} \approx y(t_{j+m-1})$, sondern die m vorher berechneten Näherungen

$$y_j \approx y(t_j), \dots, y_{j+m-1} \approx y(t_{j+m-1}).$$

Der Einfachheit halber benutzen wir im Folgenden immer äquidistante Gitter

$$(t_i)_{i=0}^n = (a+ih)_{i=0}^n$$

mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$.

Definition 5.7 Das Verfahren heißt

- implizit, falls y_{j+m} in Φ vorkommt, sonst explizit.

- <u>linear</u>, falls Φ die Form

$$\Phi(t, r_0, \dots, r_m, h) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i f(t+ih, r_i) \quad \begin{pmatrix} t \in [a,b], \\ r_0, \dots, r_m \in \mathbb{R}^N, \\ h \in [0, h_0] \end{pmatrix}$$

hat mit Konstanten $\beta_0, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$.

Die bisher (Abschnitt B) betrachteten Einschrittverfahren waren von der Form

$$m = 1: \quad \alpha_0 r_j + \alpha_1 r_{j+1} = h\,\Phi(t_j, r_j, \cancel{r_{j+1}}, h)$$

mit $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$ und von r_{j+1} unabhängigen (= expliziten) Verfahren.

<u>Definition 5.8</u> (a) Man nennt

$$(*) \quad \tau(t,h) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, r(t+ih) - \Phi(t, r(t), r(t+h), \dots, r(t+mh), h)$$

den <u>lokalen Diskretisierungsfehler</u> von Φ

(b) Das Verfahren heißt <u>nullstabil</u>, falls für das <u>erzeugende Polynom</u>

$$\varrho(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_0$$

die <u>Dahlquist-Bedingung</u> gilt:

(i) Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\varrho(z) = 0$, so ist $|z| \leq 1$ und

(ii) Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $\varrho(z) = 0$, so ist z einfache Nullstelle von ϱ.

(c) Das Verfahren heißt <u>konsistent von der Ordnung</u> $p \geq 1$, falls $K, h_0 > 0$ existieren mit

$$\|\tau(t,h)\| \leq K h^p \quad \forall t \in [a,b] \ \forall h \in (0, h_0)$$

(d) Das Verfahren heißt <u>konvergent von der Ordnung</u> $p \geq 1$, falls $\forall C > 0$ und

$\forall r_0, \dots, r_{m-1} \in \mathbb{R}^N$ mit $\max\limits_{j=0,\dots,m-1} \|r_j - r(t_j)\| \leq C h^p$ $\exists K, h_0 > 0$ so, dass sich der

<u>globale Verfahrensfehler</u> abschätzen lässt in der Form

$$\max_{j=0,\dots,n} \|r_j - r(t_j)\| \leq K h^p \quad \forall h \in (0, h_0).$$

Für die in B betrachteten expliziten Einschrittverfahren Φ (d.h. $m=1$, $\alpha_0=-1$, $\alpha_1=1$) ist

- $\tau(t,h) = \frac{1}{h}\left(-y(t)+y(t+h)\right) - \Phi(t, y(t), \cancel{y(t+h)}, h)$ genau wie in B
- $\varrho(z) = \alpha_1 z + \alpha_0 = z-1$ automatisch nullstabil.

Analog zum Konvergenzsatz 5.4 kann man zeigen ([Plato, Thm. 8.9]):

Satz 5.9 Sei $\Phi : [a,b] \times (\mathbb{R}^N)^{m+1} \times [0,h_0] \to \mathbb{R}^N$ ein m-Schrittverfahren so, dass

(i) Φ nullstabil ist,

(ii) Φ einer Lipschitz-Bedingung der Form
$$\| \Phi(t, y_0, \dots, y_m, h) - \Phi(t, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_m, h) \| \leq L \sum_{i=0}^{m} \| y_i - \tilde{y}_i \| \quad \forall\, (t,h) \in [a,b] \times [0,h_0],\ (y_i), (\tilde{y}_i) \in (\mathbb{R}^N)^{m+1}$$
genügt.

Hat Φ die Konsistenzordnung $p \geq 1$, so hat Φ auch Konvergenzordnung $p \geq 1$.

Für explizite 1-Schrittverfahren ist dies genau Satz 5.4. Für lineare m-Schrittverfahren kann man zeigen ([Plato, Lemma 8.16])

Satz 5.10 Sei $\Phi : [a,b] \times (\mathbb{R}^N)^{m+1} \times [0,h_0] \to \mathbb{R}^N$,
$$\Phi\left(t, (y_i)_{i=0}^{m}, h\right) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i f(t+ih, y_i)$$
ein lineares m-Schrittverfahren. Ist $f \in C^p(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ($I \supset [a,b]$ offenes Intervall) mit $p \geq 1$ und erfüllt Φ die Gleichungen

- $(\varrho(1) =)\ \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 0$
- $(\varrho'(1) =)\ \sum_{i=1}^{m} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{m} \beta_i$
- $\sum_{i=1}^{m} i^\nu \alpha_i = \nu \sum_{i=1}^{m} i^{\nu-1} \beta_i \quad (\nu = 2, \dots, p)$,

so hat Φ Konsistenzordnung p.

E **Beispiele linearer m-Schrittverfahren**

Seien $m \geq 1$, $0 \leq \ell \leq r \leq m$ mit $r-\ell < m$ ganze Zahlen.

Wir suchen Verfahren der Form

$$y_{j+m} - y_{j+r-\ell} = h \sum_{i=0}^{r} \beta_i^{(r,\ell)} f(t_{j+i}, y_{j+i}),$$

d.h. lineare m-Schrittverfahren mit

$$(\alpha_i)_{i=0}^{m} = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ r-\ell}}{-1},0,\dots,0,1), \quad (\beta_i)_{i=0}^{m} = (\beta_0^{(r,\ell)},\dots,\beta_r^{(r,\ell)},0,\dots,0)$$

Die Nullstellen des erzeugenden Polynoms

$$\varrho(z) = z^m - z^{r-\ell} = z^{r-\ell}(z^{m-r+\ell}-1)$$

erfüllen die Dahlquist-Bedingung (Definition 5.8). Also sind die Verfahren nullstabil.

Idee: Für die exakte Lösung gilt

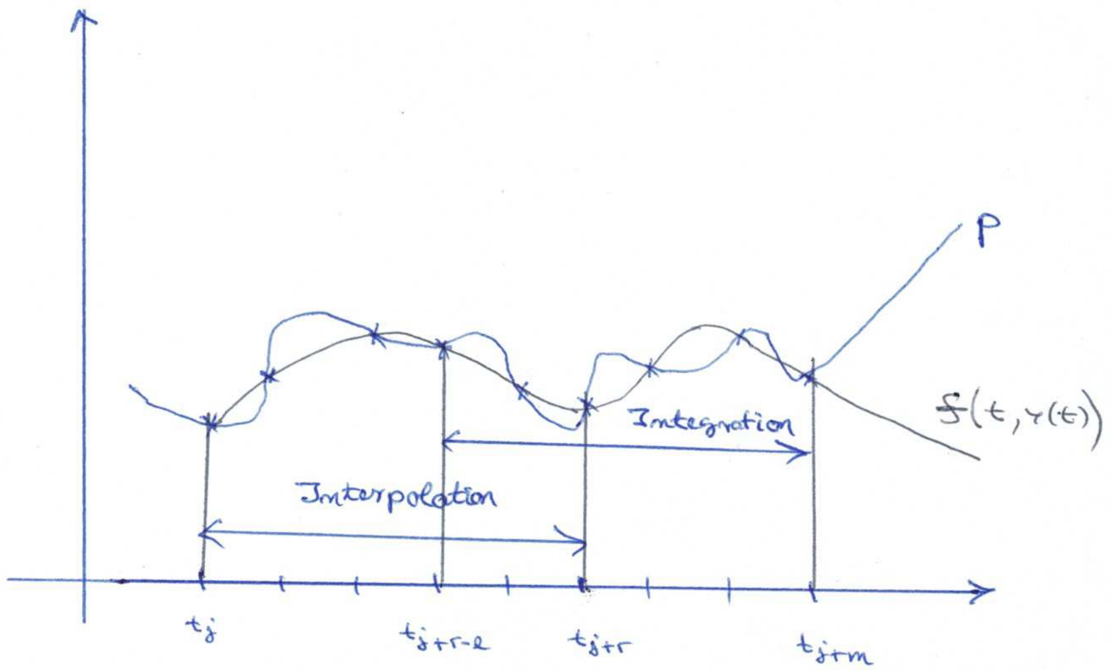
$$y(t_{j+m}) - y(t_{j+r-\ell}) = \int_{t_{j+r-\ell}}^{t_{j+m}} f(t,y(t))\,dt \quad \left(= \int_{t_{j+r-\ell}}^{t_{j+m}} y'(t)\,dt\right).$$

Wir ersetzen die Funktion $t \mapsto f(t,y(t))$ durch das eindeutig bestimmte Polynom p vom Grade $\leq r$ mit

$$p(t_{j+i}) = f(t_{j+i}, y_{j+i}) \quad (i=0,\dots,r)$$

und ersetzen das Integral auf der rechten Seite durch

$$\int_{t_{j+r-\ell}}^{t_{j+m}} p(t)\,dt.$$



Wir suchen Verfahren der Form

$$y_{j+m} - y_{j+(r-l)} = h \sum_{i=0}^{r} \beta_i \, f(t_{j+i}, y_{j+i}).$$

Für die exakte Lösung gilt

$$y(t_{j+m}) - y(t_{j+r-l}) = \int_{t_{j+r-l}}^{t_{j+m}} f(s, y(s))\, ds \quad (\text{mit } t_{j+i} = t_j + ih).$$

<u>Idee</u> Ersetzt man $f(s, y(s))$ durch das eindeutig bestimmte Polynom p (Satz 3.2.1 in [Bildhauer]) mit $\deg(p) \le r$ und

$$p(t_{j+i}) = f(t_{j+i}, y_{j+i}) \qquad (i = 0, \dots, r)$$

(d.h. $p(s) = \sum_{i=0}^{r} f(t_{j+i}, y_{j+i}) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{r} \frac{s - t_{j+k}}{t_{j+i} - t_{j+k}}$), so ist

$$\int_{t_{j+r-l}}^{t_{j+m}} p(s)\, ds = h \sum_{i=0}^{r} \beta_i \, f(t_{j+i}, y_{t_{j+i}})$$

mit

$$\beta_i = \frac{1}{h} \int_{t_j + (r-l)h}^{t_j + mh} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{r} \frac{s - (t_j + kh)}{(i-k)h}\, ds$$

(Substitution: $s \rightsquigarrow sh + t_j + (r-l)h$)

$$= \cancel{\frac{1}{h}} \int_0^{m-(r-\ell)} \left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{r} \frac{s+r-\ell-k}{i-k} \right) \cancel{h}\, ds$$

$$= \int_{r-\ell}^{m} \left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{r} \frac{s-k}{i-k} \right) ds \qquad (i=0,\dots,r).$$

Für spezielle Wahlen von r und ℓ betrachten wir die m-Schrittverfahren

$$y_{j+m} - y_{j+(r-\ell)} = h \sum_{i=0}^{r} \beta_i f(t_{j+i}, y_{j+i})$$

mit den oben definierten β_i's. Wir schreiben abkürzend

$$f_{j+i} := f(t_{j+i}, y_{j+i}).$$

(1) Adams-Bashforth-Verfahren $\hat{=}$ $r = m-1$, $\ell = 0$ $(r-\ell = m-1)$

$$\Rightarrow \beta_i = \int_{m-1}^{m} \left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m-1} \frac{s-k}{i-k} \right) ds \qquad (i=0,\dots,m-1)$$

$\Rightarrow$ $y_{j+m} - y_{j+m-1} = h \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i f_{j+i}$ ist ein explizites m-Schrittverfahren

Ausrechnen der Integrale liefert:

$m=1$: $y_{j+1} - y_j = h f_j$ $\hat{=}$ Eulerverfahren aus Beispiel 5.5

$m=2$: $y_{j+2} - y_{j+1} = \frac{h}{2}(3 f_{j+1} - f_j)$

$m=3$: $y_{j+3} - y_{j+2} = \frac{h}{12}(23 f_{j+2} - 16 f_{j+1} + 5 f_j)$

Satz 5.11 [Plato, Thm. 8.25] Für $f \in C^m(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ hat das m-Schritt Adams-Bashforth-Verfahren die Konsistenzordnung $p = m$

(Für die obigen m's folgt dies mit Satz 5.10!)

Allgemein mit einem Satz über Lagrange-Interpolation

(2) Adams-Moulton-Verfahren $\hat{=}$ $r=m$, $l=1$ $(r-l=m-1)$

$$\Rightarrow \quad \beta_i = \int_{m-1}^{m} \Big(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m} \frac{s-k}{s-i} \Big)\, ds \qquad (i=0,\dots,m)$$

$\Rightarrow$ $y_{j+m} - y_{j+m-1} = h \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_{j+i}$ ist ein implizites m-Schrittverfahren

Satz 5.12 [Plato, Thm 8.29] Für $f \in C^{m+1}(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ hat das m-Schritt Adams-Moulton-Verfahren Konsistenzordnung $p = m+1$

$m=1$: $y_{j+1} - y_j = \frac{h}{2}(f_{j+1} + f_j)$ Trapezregel

$m=2$: $y_{j+2} - y_{j+1} = \frac{h}{12}(5 f_{j+2} + 8 f_{j+1} - f_j)$

$m=3$: $y_{j+3} - y_{j+2} = \frac{h}{24}(9 f_{j+3} + 19 f_{j+2} - 5 f_{j+1} + f_j)$

(3) Nyström-Verfahren $\hat{=}$ $r=m-1$, $l=1$ [Plato, Thm. 8.34]

$$\Rightarrow \quad \beta_i = \int_{m-2}^{m} \Big(\prod_{k=0}^{m-1} \frac{s-k}{i-k} \Big)\, ds \qquad (i=0,\dots,m-1)$$

$\Rightarrow$ $y_{j+m} - y_{j+m-2} = h \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i f_{j+i}$ ist ein explizites m-Schrittverfahren mit Konsistenzordnung $p = m$ für $f \in C^m(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

$m=2$: $y_{j+2} - y_j = 2h f_{j+1}$

$m=3$: $y_{j+3} - y_{j+1} = \frac{h}{3}(7 f_{j+2} - 2 f_{j+1} + f_j)$

(4) Milne-Simpson-Verfahren $\hat{=}$ $r=m$, $l=2$ [Plato, Thm. 8.38]

$$\Rightarrow \quad \beta_i = \int_{m-2}^{m} \Big(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m} \frac{s-k}{i-k} \Big)\, ds \qquad (i=0,\dots,m)$$

$\Rightarrow \quad y_{j+m} - y_{j+m-2} = \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_{j+i}$ ist ein implizites m-Schrittverfahren mit Konsistenzordnung $p = m+1$ für $f \in C^\infty(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

$m=2: \quad y_{j+2} - y_j = \frac{h}{3}\left(f_{j+2} + 4 f_{j+1} + f_j\right)$ Simpson-Regel

$m=3: \quad y_{j+3} - y_{j+1} = \frac{h}{3}\left(f_{j+3} + 4 f_{j+2} + f_{j+1}\right)$

$m=4: \quad y_{j+4} - y_{j+2} = \frac{h}{90}\left(29 f_{j+4} + 124 f_{j+3} + 24 f_{j+2} + 4 f_{j+1} - f_j\right)$

Fazit: Die üblichen linearen m-Schrittverfahren sind nullstabil und haben für $f \in C^\infty(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ Konsistenzordnung

$p = m$ im expliziten Fall

$p = m+1$ im impliziten Fall.

Die angegebenen Konsistenzordnungen kann man mit dem folgenden Interpolationssatz von Lagrange beweisen.

Satz 5.13 (Lagrangesche Interpolationsformel) Seien $g \in C^{r+1}([c,d], \mathbb{R}^N)$, $s_0, \dots, s_r \in [c,d]$ paarweise verschieden und sei

$$p(s) = \sum_{i=0}^{r} g(s_i)\left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{r} \frac{s - s_k}{s_i - s_k}\right)$$

das eindeutige Polynom mit $\deg(p) \le r$ und

$$p(s_i) = g(s_i) \qquad (i = 0, \dots, r).$$

(a) Zu $s \in [c,d]$ existieren Zwischenstellen

$$\xi_n \in [\min(s, s_0, \dots, s_r), \max(s, s_0, \dots, s_r)] \qquad (1 \le n \le N)$$

mit

$$g(s) - p(s) = \frac{1}{(r+1)!}\left(g_n^{(r+1)}(\xi_n)\right)_{n=1}^{N} \prod_{k=0}^{r}(s - s_k).$$

(b) Für äquidistante Gitter $s_i = t + ih \in [c,d]$ $(i=0,\dots,r)$ und

$$s = s_{r-l} + \Theta h \qquad \left(l=0,\dots,r, \quad 0 \le \Theta \le \frac{d-s_{r-l}}{h}\right)$$

ist

$$g(s) - p(s) = \frac{1}{(r+1)!}\left(\prod_{k=0}^{r} (k-l+\Theta)\right) \left(g_n^{(r+1)}(\xi_n)\right)_{n=1}^{N} h^{r+1}$$

Beweis. (a) Satz 45 in [Erwe, Differential- und Integralrechnung I]

(b) Für s, s_i wie in (b) gilt

$$\prod_{k=0}^{r} (s-s_k) = \prod_{k=0}^{r} (r-l+\Theta-k)h = \left(\prod_{k=0}^{r} (k-l+\Theta)\right) h^{r+1}$$

Als Anwendung kann man die obigen Ergebnisse über die Konsistenz linearer m-Schrittverfahren beweisen. Sei etwa $y : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t,y), \quad y(a) = y_0$$

mit einer Funktion $f \in C^m(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ und einem offenen Intervall $I \supset [a,b]$. Zum Beweis von Satz 5.11 über das Adams-Bashforth-Verfahren wähle man eine Fortsetzung von y zu einer Lösung $y: [c,d] \to \mathbb{R}^N$ auf einem größeren Intervall

$$[c,d] = [a-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset I .$$

(Dies ist möglich nach Satz 4.8 (b)) und wende Satz 5.13 an mit

$g = y' \in C^m([c,d], \mathbb{R}^N)$, $r = m-1$, $l = 0$ und

$$s_i = t + ih \qquad (t \in [a,b], \; i = 0,\dots,m-1).$$

Dann erhält man für $h \in \left(0, \frac{\varepsilon}{m-1}\right)$ die folgenden

Abschätzungen des lokalen Diskretisierungsfehlers:

$$\|\tau(t,h)\| = \frac{1}{h} \| y(t+mh) - y(t+(m-1)h) - \sum_{i=0}^{m-1} f(t+ih, y(t+ih))\, h\, \beta_i \|$$

$$= \frac{1}{h} \| \int_{t+(m-1)h}^{t+mh} y'(s)\, ds - \sum_{i=0}^{m-1} y'(t+ih) \int_{t+(m-1)h}^{t+mh} \Big(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{s-(t+kh)}{(i-k)h} \Big) ds \|$$

$$= \frac{1}{h} \| \int_{t+(m-1)h}^{t+mh} y'(s) - \sum_{i=0}^{m-1} y'(s_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-1} \Big(\frac{s-s_k}{s_i-s_k} \Big) ds \|$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_{t+(m-1)h}^{t+mh} \| y'(s) - p(s) \| \; ds$$

$$\leq \quad \Big(0 \leq \theta \leq 1,\ l=0 \Rightarrow \prod_{k=0}^{m-1} (k-l+\theta) \leq m! \Big)$$

$$\sqrt{N} \max_{n=1,\dots,N} \Big(\sup_{s \in [c,d]} | y_n^{(m+1)}(s) | \Big) h^m .$$

Also hat das (lineare) m-Schritt Adams-Bashforth-Verfahren für $f \in C^m(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ die Konsistenzordnung $p = m$.

Die übrigen Ergebnisse folgen ganz ähnlich.