UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 1 Abgabetermin: Donnerstag, 28.10.2004

Wir betrachten die Abbildung $\tau : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)^n;\ (a_1,\dots,a_n) \mapsto (|a_1|,\dots,|a_n|)$. *Eine offene Menge* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *heißt* Reinhardtbereich, *falls* $\tau^{-1}(\{\tau(a)\}) \subset \Omega$ *für alle* $a \in \Omega$ *gilt. Ein Reinhardtbereich heißt* vollständig, *falls* $P_{\tau(a)}(0) \subset \Omega$ *für alle* $a \in \Omega$ *gilt.*

Aufgabe 1 (1+2+1=4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Für alle $a = (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\tau^{-1}(\{\tau(a)\}) \; = \; \{(a_1 e^{i\theta_1}, \dots, a_n e^{i\theta_n});\ \theta_1,\dots,\theta_n \in [0,2\pi]\} \; .$$

(b) Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ist genau dann ein Reinhardtbereich, wenn es eine offene Menge $W \subset [0,\infty)^n$ mit $\Omega = \tau^{-1}(W)$ gibt.
In diesem Fall ist W eindeutig bestimmt und Ω ist genau dann vollständig, wenn $r_1,\dots,r_n \in [0,\infty)$ mit $W = \prod_{i=0}^{n} [0, r_i)$ existieren.

(c) Ein Reinhardtbereich $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ist bereits durch $\tau(\Omega)$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für $R > 0$ und $r \in (0,\infty)^n$ sind $B_R(0)$ und $P_r(0)$ vollständige Reinhardtbereiche in $\mathbb{C}^n$. Skizzieren Sie die Mengen $\tau(B_R(0))$ und $\tau(P_r(0))$ für $n = 2$.

(b) Sei $n \geq 2$ und $r = (r_1,\dots,r_n) \in (0,1)^n$. Für $z = (z_1,\dots z_n) \in \mathbb{C}^n$ betrachte man $z' = (z_1,\dots,z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$H(r) \; = \; \{z \in \mathbb{C}^n;\ z' \in P_{r'}(0),\ |z_n| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C}^n;\ z' \in P_1(0),\ r_n < |z_n| < 1\}$$

ein nicht vollständiger Reinhardtbereich in $\mathbb{C}^n$ ist. Skizzieren Sie $\tau(H(r))$ für $n = 2$.

Aufgabe 3 **(2+2=4 Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) Die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen

$$dx_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (z_i)_i \mapsto \text{Re } z_k \ , \ dy_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (z_i)_i \mapsto \text{Im } z_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

bilden eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums

$$\Lambda := \{\varphi; \ \varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}\} \ .$$

(b) Auch die Abbildungen

$$dz_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (z_i)_i \mapsto z_k \ , \ d\bar{z}_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (z_i)_i \mapsto \bar{z}_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

bilden eine Basis von Λ.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei $p = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ mit $a_\alpha = 0$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Polynom in n Variablen über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$:
p ist genau dann homogen vom Grad k — das heißt, es gilt $p(\lambda z) = \lambda^k \cdot p(z)$ $(\lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n)$ — wenn $a_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha| \neq k$ gilt, p also nur aus Monomen vom Grad k besteht.