UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 10 Abgabetermin: Montag, 17.01.2005

Aufgabe 44 **(4 Punkte)**

Führen Sie den Beweis von Lemma 6.18 aus der Vorlesung aus.

Aufgabe 45 **(4 Punkte)**

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass $\tilde{K} = \hat{K}_{\mathbb{C}^n}$ gilt.

Aufgabe 46 **(4 Punkte)**

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte, konvexe Menge. Zeigen Sie, dass K polynom-konvex ist. (Hinweis: Benutzen Sie Lemma 7.2(c) und betrachten Sie die Mengen

$$B_\varepsilon(K) = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \operatorname{dist}(z, K) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)\ .)$$

Für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^n$ bezeichne $P(K)$ die Algebra aller stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{C}$, für die es eine Folge $(p_k)_k$ von Polynomen $p_k \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ gibt mit $\|f - p_k\|_{\infty,K} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Aufgabe 47 **(4 Punkte)**

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass K als Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ polynom-konvex ist. (Hinweis: Zeigen Sie mit Lemma 7.2, dass $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ ist. Beweisen Sie dann, dass $\tilde{K} = K$ gilt. Sie dürfen dabei benutzen, dass $P(K) = C(K)$ für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ist.)

Aufgabe 48* **(4* Punkte)**

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Zeigen Sie:

(a) Für $z \in \tilde{K}$ gibt es eine eindeutige multiplikative Linearform $\lambda = \lambda_z : P(K) \to \mathbb{C}$ mit $\lambda(p) = p(z)$ und $|\lambda(p)| \leq \|p\|_{\infty,K}$ für alle $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$.

(b) Für jede multiplikative Linearform $0 \neq \lambda : P(K) \to \mathbb{C}$ mit $|\lambda(p)| \leq \|p\|_{\infty,K}$ für alle $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ existiert genau ein $z \in \tilde{K}$ mit $\lambda = \lambda_z$.