UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 11 Abgabetermin: Montag, 24.01.2005

Aufgabe 49 **(4 Punkte)**
Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $\tilde{K}$ die polynom-konvexe Hülle von K. Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_{\infty,K} \;=\; \|f\|_{\infty,\tilde{K}}$$

für alle $f \in \mathcal{O}(\tilde{K})$ gilt.

Aufgabe 50 **(4 Punkte)**
Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie, dass U genau dann Rungesch ist, wenn es eine Folge polynomialer Polyeder $(\Omega_k)_{k\geq 1}$ mit $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ $(k \geq 1)$ gibt, so dass

$$U \;=\; \bigcup_{k\geq 1} \Omega_k \; .$$

Aufgabe 51 **(4 Punkte)**
Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Zeigen Sie:

$$K \text{ polynom-konvex} \;\Rightarrow\; \mathbb{C}^n \setminus K \text{ zusammenhängend} \; .$$

Gilt auch die umgekehrte Implikation? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Eine Funktion $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ heißt nach oben halbstetig, *falls die Mengen $u^{-1}(\,[-\infty, t)\,)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ offen in Ω (bezüglich der Relativtopologie im $\mathbb{C}^n$) sind.*

Aufgabe 52 **(4 Punkte)**
Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $u : K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig. Zeigen Sie:

(a) u ist nach oben beschränkt auf K und nimmt sein Supremum auf K an.

(b) Es existiert eine punktweise monoton fallende Folge $(u_k)_{k\geq 1}$ stetiger Funktionen $u_k : K \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x) \quad (x \in K) \; .$$

Hinweis zu (b): Betrachten Sie die Funktionen

$$u_k(x) := \sup_{y \in K} (u(y) - k\|x - y\|) \; .$$