UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 12 Abgabetermin: Montag, 31.01.2005

Aufgabe 53 **(4 Punkte)**
Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:
Ist $a \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\bar{D}_r(a) \subset \Omega$, so gilt

$$u(a) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt \; .$$

Aufgabe 54 **(4 Punkte)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch und $a \in \Omega,\ r > 0$ mit $u(a) > -\infty$ und $\bar{D}_r(a) \subset \Omega$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$u(a) \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt \; .$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Aufgaben 52(b) und 53, sowie den folgenden Satz. (Sie müssen diesen Satz nicht beweisen.)
Satz (10.2.3 in [Lorenz]):
Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Zu jeder stetigen Funktion $h : \partial D_r(a) \to \mathbb{R}$ existiert eine stetige Funktion $H : \bar{D}_r(a) \to \mathbb{R}$, so dass $H|_{\partial D_r(a)} = h$ gilt und $H|_{D_r(a)}$ harmonisch ist.)

Aufgabe 55 **(2+2+2=6 Punkte)**
Sei $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ eine nach oben halbstetige Funkfion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$, so dass zu jedem $a \in \Omega$ ein $r(a) > 0$ existiert mit $\bar{D}_{r(a)}(a) \subset \Omega$ und

$$u(a) \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt$$

für alle $0 < r < r(a)$. (Dabei sei obiges Integral als $-\infty$ definiert, falls der Integrand nicht integrabel ist.) Zeigen Sie für $K \subset \Omega$ kompakt und $h : K \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $u \leq h$ auf ∂K gilt und $h|_{Int(K)}$ harmonisch ist, die folgenden Aussagen.

(a) Die Menge

$$M \;:=\; \{z \in K;\ (u-h)(z) = \sup_{w \in K}(u-h)(w)\}$$

ist kompakt und nichtleer.

(b) Wäre $u - h > 0$ auf M, so wäre $M \subset Int(K)$ und zu jedem $b \in \partial M$ gäbe es ein $r > 0$ mit

$$(u-h)(b) \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u-h)(b + re^{it})dt \;<\; (u-h)(b) \; .$$

Folgern Sie nun, dass u subharmonisch ist.

Aufgabe 56 **(3+1=4 Punkte)**

Sei $u : G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und sei $a \in G$ mit $u(z) \leq u(a)$ für alle $z \in G$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 54, dass die Menge $\{z \in G;\ u(z) = u(a)\}$ offen ist.

(b) Folgern Sie, dass u konstant ist.

Aufgabe 57* **(5* Punkte)**

Sei $u : G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $u \not\equiv -\infty$.

(a) Seien $a \in G$ mit $u(a) > -\infty$ und $R > 0$ mit $\bar{D}_R(a) \subset G$. Zeigen Sie, dass $u|_{\bar{D}_R(a)}$ integrabel ist. Wählen Sie dazu stetige Funktionen $h_k : \bar{D}_R(a) \to \mathbb{R}$ mit $h_k \downarrow u|_{\bar{D}_R(a)}$ und berechnen Sie $\int_{\bar{D}_R(a)} h_k dz$ mit Hilfe von Polarkoordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M \ := \ \{z \in G;\ \text{es existiert eine Umgebung } U \text{ von } z \text{ mit } u|_U \in \mathcal{L}^1(U)\}$$

abgeschlossen in G ist.
(Hinweis: Sonst gäbe es eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M, so dass $u(a_k) > -\infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \in \Omega \setminus M$ gilt.)

(c) Schließen Sie, dass u lokal integrabel ist.