UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 13 Abgabetermin: Donnerstag, 10.02.2005

Aufgabe 58 **(4 Punkte)**
Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(U)$ analytisch mit $f(z) = 0$ für alle $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$ mit $z_1 = 0$. Zeigen Sie, dass eine analytische Funktion $g \in \mathcal{O}(U)$ existiert mit $f(z) = z_1 g(z)$ für alle $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$.
(Hinweis: Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Aufgabe 59 **(4 Punkte)**
Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, so dass jedes Cousin-I-Datum über U eine Lösung hat. Zeigen Sie, dass $H^1(C^\infty(U), \bar{\partial}) = 0$ ist.
(Hinweis: Offene Kugeln $B \subset \mathbb{C}^n$ sind Rungesch.)

Aufgabe 60 **(4 Punkte)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aufsteigende Folgen offener Mengen $\Omega_j \subset \mathbb{C}^n$ beziehungsweise kompakter Mengen $K_j \subset \mathbb{C}^n$ mit $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{Int}(K_j)$, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $K_j \subset \Omega_j \subset \Omega$,

(ii) K_j hat die Cousin-Eigenschaft,

(iii) jedes $g \in \mathcal{O}(K_j)$ ist auf K_j gleichmäßiger Limes einer Folge in $\mathcal{O}(\Omega_{j+1})$.

Zeigen Sie, dass die $\bar{\partial}$-Sequenz auf Ω exakt ist.
(Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Satz 7.8 vor.)

Aufgabe 61 **(4 Punkte)**
Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen $A_j \subset \mathbb{C}^n$. Setze $A = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{dist}(K, A_j) \;=\; \operatorname{dist}(K, A)\ .$$