UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 2 Abgabetermin: Montag, 8.11.2004

Aufgabe 5 (Cauchy-Produkt von Reihen) **(4 Punkte)**

Seien $a = \sum_{j\in\mathbb{N}^n} a_j$, $b = \sum_{j\in\mathbb{N}^n} b_j$ konvergente Reihen. Für $j \in \mathbb{N}^n$ sei $c_j = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N}^n\\ k+l=j}} a_k \cdot b_l$.

Zeigen Sie, dass $\sum_{j\in\mathbb{N}^n} c_j = a \cdot b$.

(Hinweis: Man kann zunächst die Konvergenz von $\sum_{j\in\mathbb{N}^n} c_j$ (etwa mit Hilfe von Korollar 1.5 aus der Vorlesung) zeigen und dann eine geeignete Abzählung von $\mathbb{N}^n$ und das Cauchy-Produkt im Fall $n = 1$ benutzen um den Reihenwert zu bestimmen.)

Seien $c_\nu \in \mathbb{C}$ für $\nu \in \mathbb{N}^n$. Der Konvergenzbereich *einer Potenzreihe $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu z^\nu$ ist das Innere der Menge der Punkte $z \in \mathbb{C}^n$, für die die Reihe konvergiert.*

Aufgabe 6 **(2+3=5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass der Konvergenzbereich einer Potenzreihe stets ein vollständiger Reinhardtbereich ist.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich Ω und skizzieren Sie $\tau(\Omega)$ für $n = 2$.

(i) $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} z^\nu$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} (z_1 \cdot \ldots \cdot z_n)^k$

(iii) $\sum_{\nu=(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{N}^2} \frac{\nu_1}{\nu_2!} z^\nu$

Aufgabe 7 **(4 Punkte)**

Sei $U \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ offen und $f = (u, v) : U \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Sei $a \in U$ und $Df(a)$ das totale Differential von f in a. Zeigen Sie: Fasst man $Df(a)$ als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ auf, so gilt mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 3

$$Df(a) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)dx_k \;+\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(a)dy_k\ .$$

Wie sieht die entsprechende Basisentwicklung von $Df(a)$ nach den $dz_k, d\bar{z}_k$ $(1 \le k \le n)$ aus?

Aufgabe 8 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Ω ist Vereinigung offener Polyzylinder mit Mittelpunkt 0.

(ii) Für $w = (w_i) \in \Omega$ und $z = (z_i) \in \mathbb{C}^n$ mit $|z_i| \leq |w_i|$ $(1 \leq i \leq n)$ ist auch $z \in \Omega$.

(iii) Ω ist ein vollständiger Reinhardtbereich.

(b) Erfüllt Ω die Bedingungen aus (a) und ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so hat f eine kompakt gleichmässig konvergente Potenzreihenentwicklung

$$f(z) \;=\; \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu z^\nu$$

auf ganz Ω.

Aufgabe 9* **(3* Punkte)**

Zeigen Sie den Satz von Liouville im mehrdimensionalen Fall: Jede beschränkte, holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist konstant.

(Hinweis: Ein Induktionsbeweis ist möglich.)