UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 3 Abgabetermin: Montag, 15.11.2004

Aufgabe 10 **(4 Punkte)**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $h = (h_1, \ldots, h_n) : G \to \mathbb{C}^n$ holomorph (das heißt komponentenweise holomorph). Zeigen Sie: Ist $\|h\| : G \to \mathbb{C}$ konstant, so ist h konstant.
Bleibt diese Behauptung richtig, wenn man die euklidische Norm $\|\cdot\|$ durch die Maximumsnorm $\|(z_\nu)_{j=1}^n\|_\infty = \max\limits_{\nu=1,\ldots,n} |z_\nu|$ ersetzt?

Für eine beschränkte, offene Menge $D \subset \mathbb{C}^n$ definieren wir die Diskalgebra *über D durch*

$$A(D) \;=\; \{f \in C(\bar{D});\; f|_D \text{ holomorph}\}\;.$$

Aufgabe 11 **(3 Punkte)**

Sei $D \subset C^n$ eine beschränkte, offene Menge. Zeigen Sie, dass $A(D)$ abgeschlossen in dem Raum $C(\bar{D})$ der stetigen Funktionen auf $\bar{D}$ mit der Supremumsnorm ist.

Aufgabe 12 **(2+2+2=6 Punkte)**

Sei $a \in \mathbb{C}^n$, $r \in (0,\infty)^n$ und $P = P_r(a) \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder mit ausgezeichnetem Rand $\partial_0 P$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $z \in P$ existiert eine Konstante $C_z > 0$, so dass

$$f(z) \;\le\; C_z \|f\|_{\infty,\partial_0 P}$$

für alle $f \in A(P)$ gilt.
(Hinweis: Cauchy'sche Integralformel = Satz 1.2)

(b) (Maximumprinzip) Zeigen Sie, dass

$$f(z) \;\le\; \|f\|_{\infty,\partial_0 P}$$

für alle $z \in \bar{P}$ und $f \in A(P)$ gilt.
(Hinweis: Wenden Sie (a) für $z \in P$ auf die Funtionen f^k $(k \in \mathbb{N})$ an.)

(c) Sei $S \subset \partial P$ eine abgeschlossene Teilmenge des Randes von P. Es gelte

$$f(z) \;\le\; \|f\|_{\infty,S}$$

für $z \in \bar{P}$ und $f \in A(P)$. Zeigen Sie, dass $\partial_0 P \subset S$ gilt.

Bemerkung: Die Aufgabenteile (b) und (c) zeigen das $\partial_0 P$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von ∂P ist, für die das Maximumprinzip für Funktionen aus der Diskalgebra gilt. Man nennt $\partial_0 P$ daher auch den Shilov-Rand *von P.*

Aufgabe 13 **(2=2=4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}^n$ genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist.

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und C eine Zusammenhangskomponente von U. Zeigen Sie, dass $\partial C \subset \partial U$ gilt.

Aufgabe 14* **(3* Punkte)**

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $\partial_\nu f = 0$ für alle $\nu = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.