UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 4 Abgabetermin: Montag, 22.11.2004

Ein Reinhardtbereich $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt einfach*, falls G zusammenhängend ist und 0 enthält.*

Aufgabe 15 (1+2+2=5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jeder vollständige Reinhardtbereich $G \subset \mathbb{C}^n$ einfach ist.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein einfacher Reinhardtbereich. Betrachte

$$\hat{G} := \bigcup_{z \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n} P_{\tau(z)} .$$

Zeigen Sie, dass $\hat{G}$ der kleinste vollständige Reinhardtbereich ist, der G enthält. (Man nennt $\hat{G}$ folglich auch die *vollständige Hülle* von G.)

(c) Gilt die Umkehrung von (a)

- im Fall $n = 1$?
- im Fall $n \geq 2$?

Seien $U, V \subset C^n$ offen. Man nennt eine stetige Abbildung $f : U \to V$ eigentlich*, falls für alle kompakten Mengen $K \subset V$ auch das Urbild $f^{-1}(K) \subset U$ kompakt ist.*

Aufgabe 16 (1+2+2=5 Punkte)

Seien $U, V \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \to V$ stetig.

(a) Zeigen Sie: f biholomorph $\Rightarrow$ f eigentlich.
Finden Sie eine eigentliche, holomorphe Funktion, die nicht biholomorph ist.

(b) Seien U, V außerdem beschränkt. Zeigen Sie, dass f genau dann eigentlich ist, wenn für jede Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in U mit $\text{dist}(z_k, \partial U) \xrightarrow{k} 0$ folgt, dass $\text{dist}(f(z_k), \partial V) \xrightarrow{k} 0$.
Dabei bezeichne dist wie gewohnt die Abstandsfunktion, also

$$\text{dist}(z, A) = \inf_{y \in A} \|z - y\| \quad (\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C}^n) .$$

(c) Man betrachte den Einheitspolyzylinder und die Einheitskugel $P_1(0), B_1(0) \subset \mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass es keine eigentliche, holomorphe Funktion $f : P_1(0) \to B_1(0)$ gibt. (Hinweis: Man kann sich am Beweis des biholomorphen Falls (siehe Vorlesung 2.14) orientieren.)

Aufgabe 17 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{C}^n$ eine beliebige nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie, dass M genau dann eine komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension $p = 0$ ist, wenn M diskret ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2;\ z^2 = w^3\} \subset \mathbb{C}^2$ die Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion, aber keine komplexe Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 18 **(3 Punkte)**

Sei $n \geq 2$, $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$.
Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge $Z(f) = \{z \in U;\ f(z) = 0\}$ von f keine isolierten Punkte enthält.

Aufgabe 19* **(3* Punkte)**

Seien $U \subset \mathbb{C}^n$, $V \subset \mathbb{C}^m$ offene Mengen und $f : U \to V$ biholomorph. Zeigen Sie, dass $n = m$ gelten muss.