UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 5 Abgabetermin: Montag, 29.11.2004

Eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension *p ist ein topologischer Hausdorffraum M zusammen mit einem System von Homöomorphismen (auch* Karten *genannt)*

$$\varphi_i : U_i \to V_i \quad (i \in I),$$

zwischen offenen Mengen $U_i \subset M$ und $V_i \subset \mathbb{C}^p$, so daß

- $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ *gilt.*
- *Wann immer $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist, ist*

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

eine biholomorphe Abbildung zwischen offenen Mengen in $\mathbb{C}^p$.

Aufgabe 20 **(4 Punkte)**

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine Untermannigfaltigkeit im Sinne der Vorlesung. Man zeige, daß M versehen mit der Relativtopologie des $\mathbb{C}^n$ zusammen mit einem geeigneten System von Karten eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Für eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}^n$ nennt man $A \subset D$ analytisch in D, *falls A abgeschlossen in D ist und zu jedem $a \in A$ eine offene Umgebung U von a und eine holomorphe Abbildung $h \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ existieren, so dass $A \cap U = Z(h)$.*

Aufgabe 21 **(2+1+1=4 Punkte)**

Sei $D \subset \mathbb{C}^n, D_1 \subset \mathbb{C}^{n_1}, D_2 \subset \mathbb{C}^{n_2}$ offen Mengen. Zeigen Sie:

(a) Endliche Vereiningungen und endliche Durchschnitte analytischer Mengen in D sind wieder analytisch in D.

(b) Sind $A_1 \subset D_1,\ A_2 \subset D_2$ analytisch, so ist $A_1 \times A_2 \subset D_1 \times D_2$ analytisch.

(c) Ist $f : D_1 \to D_2$ holomorph und $A \subset D_2$ analytisch, so ist $f^{-1}(A) \subset D_1$ analytisch.

Aufgabe 22 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $M \subset C^n$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}^n$, so dass $M \subset D$ abgeschlossen in D ist.

(b) Ist $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, so dass $M \subset D$ abgeschlossen in D ist, so ist M analytisch in D.

Aufgabe 23 **(1+3=4 Punkte)**

Sei $\varepsilon > 0$ und $0 \neq f \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(0))$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine eindeutige punktweise konvergente Reihenentwicklung der Form

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z) \quad (z \in B_\varepsilon(0))$$

mit homogenen Polynomen $p_k \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ vom Grad k besitzt. Diese darstellende Reihe konvergiert automatisch kompakt gleichmäßig auf $B_\varepsilon(0)$.

(b) Seien p_k $(k \in \mathbb{N})$ wie im Teil (a). Sei m die kleinste natürliche Zahl mit $p_m \neq 0$. Zeigen Sie, dass eine unitäre Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ existiert, so dass die Funktion

$$B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}\;;\; z \mapsto f(Az)$$

z_n-regulär in 0 von der Ordnung m ist.

Aufgabe 24* **(2*+2*=4* Punkte)**

Ist Ω ein Reinhardtbereich, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $r \in \tau(\Omega \cap (\mathbb{C}^*)^n)$, so sei

$$f_r(z) \;=\; \int_{\partial_0 P_r(0)} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (\xi_n - z_n)} d\xi_1 \ldots d\xi_n \quad (z \in P_r(0)).$$

(a) Seien $s = (s_1, \ldots, s_n), t = (t_1, \ldots, t_n) \in (0, \infty)^n$ mit $s_j < t_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Wir betrachten den Reinhardtbereich

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C}^n;\; s_j < |z_j| < t_j \text{ für } j = 1, \ldots, n\}\;.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f_r|_{P_s(0)} : P_s(0) \to \mathbb{C}$ unabhängig von $r \in \tau(\Omega)$ ist. (Hinweis: Man kann die Cauchy-Integralformel im eindimensionalen Fall benutzen.)

(b) Sei Ω ein einfacher Reinhardtbereich und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die Funktionen f_r für alle $r \in \tau(\Omega \cap (\mathbb{C}^*)^n)$ auf einer geeigneten Nullumgebung mit f übereinstimmen. (Hinweis: Betrachen Sie die Menge

$$\{r \in \tau(\Omega \cap (\mathbb{C}^*)^n);\; f_r \text{ stimmt mit } f \text{ auf einer Nullumgebung überein }\}\;.)$$