UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 6 Abgabetermin: Montag, 6.12.2004

Aufgabe 25 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $A \subset D$ beliebig. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann analytisch in D, wenn für alle $p \in D$ eine offene Umgebung $U \subset D$ von p und eine holomorphe Funktion $h \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ mit $A \cap U = Z(h)$ existieren.

(b) Ist $n = 1$, so gilt:

$$A \text{ dünn in } D \;\Leftrightarrow\; A \text{ diskret in } D\ .$$

Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $A \subset D$ analytisch. Ein Punkt $a \in A$ heißt regulär (von der Dimension p) in A *($0 \leq p \leq n$), falls es eine offene Umgebung $U \subset D$ von a und eine holomorphe Funktion $h \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^{n-p})$ mit $\operatorname{rang} J_h(a) = n - p$ und $A \cap U = Z(h)$ gibt. (Für $p = n$ heißt das: $a \in \mathrm{Int}(a)$.) Man nennt $a \in A$* singulär in A, *falls a nicht regulär in A ist.*

Aufgabe 26 **(1+2+2=5 Punkte)**

Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $A \subset D$ analytisch.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\operatorname{Reg}(A) \;=\; \{a \in A;\; a \text{ regulär in } A\}$$

offen in A ist.

(b) Sei $a \in A$ regulär von der Dimension $p \in \{0, \ldots, n\}$ in A. Zeigen Sie, dass es paarweise verschiedene $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ und offene Umgebungen $V \subset D$ von a und $W \subset \mathbb{C}^p$ von 0 gibt, so dass die Abbildung

$$P_{i_1,\ldots,i_p} : A \cap V \to W\ ;\ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_{i_1} - a_{i_1}, \ldots, z_{i_p} - a_{i_p})$$

bijektiv ist.
(Hinweis: Schauen Sie nochmals in den Beweis von Satz 3.2.)

(c) Sei

$$A \;=\; \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3;\; z_1^2 = z_2 z_3\} \subset \mathbb{C}^3\ .$$

Zeigen Sie:

- A ist analytisch in $\mathbb{C}^3$.
- Jeder Punkt $0 \neq a \in A$ ist regulär von der Dimension 2 in A.
- 0 ist singulär in A.

Aufgabe 27 **(4 Punkte)**

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung und $f \in \mathcal{O}(U)$ z_n-regulär im Punkt $0 \in Z(f)$. Zeigen Sie:

Es gibt ein $r > 0$, so dass jede auf einer Nullumgebung $W \subset \mathbb{C}^{n-1}$ definierte Funktion $\varphi : W \to \mathbb{C}$ mit $|\varphi(z')| < r$ und $f(z', \varphi(z')) = 0$ für alle $z' \in W$ stetig in $0' \in W$ ist.

(Hinweis: Weierstraß'scher Vorbereitungssatz=4.5)

Aufgabe 28 **(1+2+2=5 Punkte)**

Wir betrachten die Mengen

$$G_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ |z_1| < \frac{1}{2},\ |z_2| < 1\} \text{ und } G_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ |z_1| < 1,\ \frac{1}{2} < |z_2| < 1\}$$

und setzen $G = G_1 \cup G_2$.

(a) Zeigen Sie, dass G ein einfaches Reinhardtgebiet ist (Wer will, kann dazu auch nur *klar* schreiben.) und berechen Sie die vollständige Hülle $\hat{G}$ von G.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$A \;=\; \{(z_1, z_2) \in G_2;\ z_1 = z_2\}$$

analytisch in G ist.

(c) Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 29, um zu zeigen, dass es keine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ auf ganz G gibt, so dass $Z(f) = A$ gilt.

Aufgabe 29* **(2*+2*=4* Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein einfacher Reinhardtbereich und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f hat eine auf ganz Ω konvergente Potenzreihenentwicklung.
(Hinweis: Aufgabe 24)

(b) Es gibt genau eine holomorphe Forsetzung $\hat{f} \in \mathcal{O}(\hat{G})$ von f auf die vollständige Hülle $\hat{G}$ von G.