UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 7 Abgabetermin: Montag, 13.12.2004

Aufgabe 30 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}^n$ offen und $a \in \Omega$. Es sei

$$r_a \ := \ \operatorname{dist}(a, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) \ = \ \inf\{\|a - w\|; \ w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega\} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) $r_a = \max\{r > 0; \ B_r(a) \subset \Omega\}$.

(b) Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist $B_{r_a}(a) \cap K^c \neq \emptyset$.

Aufgabe 31 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Zeigen Sie:

(a) $\hat{K}_\Omega$ ist beschränkt und abgeschlossen in Ω.

(b) $\hat{K}_\Omega$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{\hat{K}_\Omega}^{\mathbb{C}^n} \subset \Omega$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{dist}(\hat{K}_\Omega, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) > 0$.

Aufgabe 32 **(4 Punkte)**

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Ω ist Existenzbereich einer holomorphen Funktion.

(ii) Es gibt eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so dass für jedes $a \in \Omega$ die Funktion $f|_{B_{r_a}(a)}$ auf keine offene Umgebung von $\overline{B_{r_a}(a)}$ fortgesetzt werden kann (r_a wie in Aufgabe 30).

(iii) Es gibt eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so dass für alle $w \in \partial\Omega$ und alle $r > 0$ keine holomorphe Funktion $F \in \mathcal{O}(B_r(w))$ existiert, die mit f auf einer Zusammenhangskomponente von $B_r(w) \cap \Omega$ übereinstimmt.

(Hinweis: Zeigen Sie (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) und beachten Sie den Beweis von Satz 5.3 aus der Vorlesung.)

Man nennt ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ lokal zusammenhängend*, falls für jeden Randpunkt $z \in \partial G$ und jede offene Umgebung $V \subset C^n$ von z eine kleinere offene Umgebung $U \subset V$ von z existiert, so dass $U \cap G$ zusammenhängend ist.*

Aufgabe 33 **(1+3=4 Punkte)**

(a) Finden Sie ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, das nicht lokal zusammenhängend ist.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein lokal zusammenhängendes Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Zeigen Sie, dass G genau dann Existenzgebiet von f ist, wenn f sich auf kein Gebiet $G_1 \supsetneq G$ holomorph fortsetzen lässt.

Aufgabe 34* **(4* Punkte)**

Seien $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und A_1, A_2 analytisch in D. Weiter sei $p \in A_1 \cap A_2$, so dass für alle offenen Umgebungen $U \subset D$ von p gilt, dass $U \cap A_1 \not\subset A_2$ und $U \cap A_2 \not\subset A_1$. Zeigen Sie, dass p singulär in $A_1 \cup A_2$ ist.
(Hinweis: Aufgabe 26 (b))