UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian, Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2004/05

Blatt 8 Abgabetermin: Montag, 20.12.2004

Eine stetige Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ zwischen offenen Mengen $\Omega_i \subset \mathbb{C}^{n_i}$ $(i = 1, 2)$ heißt eigentlich, *falls $f^{-1}(K) \subset \Omega_1$ kompakt ist für jede kompakte Menge $K \subset \Omega_2$.*

Aufgabe 35 **(2+2=4 Punkte)**

Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^{n_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^{n_2}$ holomorph-konvexe, offene Mengen. Zeigen Sie:

(a) $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ ist holomorph-konvex.

(b) Existiert eine eigentliche, holomorphe Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und ist Ω_2 holomorph-konvex, so ist auch Ω_1 holomorph-konvex.

Aufgabe 36 **(4 Punkte)**

Seien $U \subset \mathbb{C}^n$, $V_1, \dots, V_r \subset \mathbb{C}$ offene Mengen und $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(U)$, so dass

$$\Omega := \{z \in U;\ f_i(z) \in V_i \text{ für } i = 1, \dots, r\} \neq \emptyset \,.$$

Zeigen Sie: Ist $\bar{\Omega} \subset U$, so ist Ω ein Holomorphiebereich.

Aufgabe 37 **(4 Punkte)**

Seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ offene Mengen, so dass für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ eine Folge $(f_k)_k$ holomorpher Funktionen $f_k \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ existiert, die kompakt gleichmäßig auf Ω_1 gegen f konvergiert. Zeigen Sie:
Für jede kompakte Menge $K \subset \Omega_1$ gilt $\hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \hat{K}_{\Omega_1}$.

Sei $n \geq 2$ und $P := P_1(0) \subset \mathbb{C}^n$ der Einheitspolyzylinder. Sei $r \in (0,1)^n$ und

$$H = H_r \ = \ \{z \in P;\ |z_1| > r_1 \ \textit{oder}\ |z_j| < r_j \ \forall j = 2, \dots, n\} \ .$$

Dann heißt das Paar (P, H) euklidische Hartogsfigur *im $\mathbb{C}^n$.*
Ist (P, H) eine euklidische Hartogsfigur und $g : P \to \mathbb{C}^n$ eine injektive holomorphe Abbildung, so heißt das Paar $(g(P), g(H))$ (allgemeine) Hartogsfigur *im $\mathbb{C}^n$.*

Aufgabe 38 **(1+2+2=5 Punkte)**
Sei $n \geq 2$ und $P := P_1(0) \subset \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie:

(a) Ist (P, H) eine euklidische Hartogsfigur im $\mathbb{C}^n$, so ist H ein einfacher Reinhardtbereich mit vollständiger Hülle $\hat{H} = P$.

(b) Ist $(\tilde{P}, \tilde{H})$ eine Hartogsfigur im $\mathbb{C}^n$ und $f \in \mathcal{O}(\tilde{H})$. Dann hat f eine eindeutige holomorphe Fortsetzung auf $\tilde{P}$.

(c) **(Kontinuitätssatz)**
Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $(\tilde{P}, \tilde{H})$ eine Hartogsfigur mit $\tilde{H} \subset G$, so dass $\tilde{P} \cap G$ zusammenhängend ist und $f \in \mathcal{O}(G)$, so hat f eine eindeutige holomorphe Fortsetzung auf $G \cup \tilde{P}$.

Aufgabe 39* **(5* Punkte)**
Sei $n \geq 2$ und sei $r \in (0,1)^n$. Zeigen Sie, dass $G := P_1(0) \setminus \bar{P}_r(0)$ ein Gebiet ist und dass man jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf $P_1(0)$ fortsetzen kann.
(Hinweis: Kontinuitätssatz=Aufgabe 38(c))