Analysis 3

Jörg Eschmeier

Universität des Saarlandes

WS 2005/06

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript stellt ohne Beweise die Ergebnisse einer im Wintersemester 1997/98 und im Wintersemester 2005/06 gehaltenen Vorlesung zusammen. In der Vorlesung wurden alle im folgenden beschriebenen Resultate in derselben Reihenfolge vollständig bewiesen. Diese Zusammenfassung soll im Idealfall dem wiederholenden Studenten dabei helfen, sich einige der wichtigsten Ergebnisse dieses Teils der klassischen Infinitesimalrechnung und ihre Rolle im Gesamtaufbau der Analysis noch einmal klar zu machen.

Der erste Teil der Vorlesung beschäftigt sich mit der Einführung des abstrakten Maßintegrals. Es werden die Konvergenzsätze für Banachraum–wertige integrierbare Funktionen über messbaren Räumen hergeleitet. Zentrale Bedeutung für den zweiten Teil über Integralsätze haben die Konstruktion des Lebesguemaßes im $\mathbb{R}^n$, der Satz von Fubini und die Transformationsformel. Bei der Definition des vektorwertigen Maßintegrals folgen wir im wesentlichen dem Buch "Real and Complex Analysis" von S. Lang. Der Satz von Fubini wird nur für Lebesguemaße bewiesen, ohne den Begriff des Produktmaßes zu benutzen.

Ziel des zweiten Teils ist der Beweis des Gaußschen Divergenzsatzes für stetig differenzierbare Funktionen, die auf einer Umgebung eines Kompaktums mit glattem Rand im $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Zur Vorbereitung betrachten wir Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ und erklären das Integral von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$. Diese Teile der Vorlesung folgen eng dem Buch "Analysis III" von O. Forster und werden nur ergänzt durch einen Abschnitt über C^∞–Zerlegungen der Eins. Die Vorlesung wurde abgeschlossen mit der Einführung von Differentialformen auf offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ und dem Beweis des Poincaréschen Lemmas über sternförmigen Gebieten.

1 Maßtheorie

1.1 σ–Algebren und messbare Funktionen

Sei $X \neq \phi$ eine Menge und $\mathcal{P}(X) := \{A;\ A \subset X\}$ die Potenzmenge von X. Für $A \subset X$ bezeichne $A^c := \{x \in X;\ x \notin A\}$ das Komplement von A, und für $A \subset B \subset X$ sei $B \setminus A = B \cap A^c$.

Definition 1.1 Eine Menge $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt $\underline{\sigma\text{–Algebra}}$, falls gilt:

(i) $\phi \in \mathfrak{M}$.

(ii) Mit $A \in \mathfrak{M}$, gilt auch $A^c \in \mathfrak{M}$.

(iii) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{M}$, so ist $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{M}$.

Bemerkung 1.2 Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_i$ $(i \in I)$ σ–Algebren auf X. Dann gilt:

a) $X \in \mathfrak{M}$ und mit jeder Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}$ gehört auch $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{M}$.

b) Mit $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$, gehören auch $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathfrak{M}$ und $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathfrak{M}$.

c) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{M}$, so existiert eine Folge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}$ mit

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \text{ und } B_k \cap B_j = \phi \text{ für } j, k \in \mathbb{N} \text{ mit } j \neq k.$$

Man definiere etwa

$$B_0 := A_0, \quad B_1 := A_1 \cap A_0^c, \ldots, B_n = A_n \cap (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1})^c.$$

d) Der Durchschnitt $\bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ ist eine σ–Algebra auf X.

Beispiele 1.3 Sei $X \neq \phi$ eine Menge.

a) $\{\phi, X\}$ und $\mathcal{P}(X)$ sind σ–Algebren auf X.

b) $\mathfrak{M} = \{A \subset X;\ A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar }\}$ ist eine σ–Algebra auf X. Zum Beweis von b) benutze man, dass die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen abzählbar ist.

Zu jeder Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ gibt es eine kleinste σ–Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

Lemma 1.4 Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann ist

$$\mathfrak{M}(\mathcal{E}) := \cap(\mathfrak{M};\ \mathfrak{M}\ \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathfrak{M})$$

die kleinste σ–Algebra auf X, die das Mengensystem $\mathcal{E}$ enthält.

Definition 1.5 Für $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt die in Lemma 1.4 beschriebene σ–Algebra $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ <u>die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ–Algebra</u> auf X.

Das für uns wichtigste Beispiel ist die von den offenen Teilmengen eines metrischen Raumes erzeugte σ–Algebra.

Beispiel 1.6 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann nennt man

$$\mathcal{B}(X) = \mathfrak{M}(\{U;\ U \subset X \text{ offen}\})$$

die <u>Borelsche σ–Algebra auf</u> X.

Man überlegt sich sofort, dass die Borelsche σ–Algebra auch von dem System aller abgeschlossenen Teilmengen von X erzeugt wird. Für die Borelsche σ–Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ kann man weitere einfache Erzeugendensysteme angeben.

Satz 1.7 Die Borelsche σ–Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wird auch erzeugt von den Systemen:

a) $\mathcal{E}_1 = \{F;\ F \subset \mathbb{R}^n \text{ ist abgeschlossen}\}$;

b) $\mathcal{E}_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \{\pi_i^{-1}((-\infty, b]);\ b \in \mathbb{R}\}$, wobei $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ die Projektion auf die i–te Koordinate ist;

c) $\mathcal{E}_3 = \{\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i];\ a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \text{ mit } a_i < b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$.

Zum Beweis überlegt man sich etwa, dass die Inklusionskette

$$\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_3$$

für die σ–Algebren $\mathcal{M}_i = \mathfrak{M}(\mathcal{E}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ gilt.

Satz 1.8 Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X, Y und ist $\mathfrak{M}$ eine σ–Algebra auf X, so definiert

$$\mathfrak{N} := \{B \subset Y;\ f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}\}$$

eine σ–algebra auf Y.

Als nützliche Folgerung aus dieser einfachen Beobachtung erhält man:

Korollar 1.9 Seien $\mathfrak{M}$ eine σ–Algebra auf X, $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ die von einem Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ erzeugte σ–Algebra auf Y und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ist $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ für alle $B \in \mathcal{E}$, so ist $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ für alle $B \in \mathfrak{N}$.

Definition 1.10

a) Ein <u>messbarer Raum</u> ist ein Paar $(X, \mathfrak{M})$ aus einer Menge $X \neq \phi$ und einer σ–Algebra $\mathfrak{M}$ auf X.

b) Seien $(X, \mathfrak{M})$ und $(Y, \mathfrak{N})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt <u>messbar</u> (bzgl. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$), falls $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ für jede Menge $B \in \mathfrak{N}$.

c) Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt <u>Borel–messbar</u>, wenn sie messbar ist bzgl. $\mathfrak{M}$ und $\mathcal{B}(Y)$.

Korollar 1.9 erleichtert es einem, die Borel–Messbarkeit von Abbildungen zu überprüfen.

Bemerkung 1.11

a) In der Situation von 1.10 c) ist eine Abbildung $f : X \to Y$ Borel–messbar genau dann, wenn $f^{-1}(U) \in \mathfrak{M}$ gilt für jede offene menge $U \subset Y$.

b) Sind (X, d) und (Y, d') metrische Räume, so ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ messbar bzgl. $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$.

c) Sind $(X, \mathfrak{M})$, $(Y, \mathfrak{N})$ und $(Z, \mathfrak{Z})$ messbare Räume und sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ messbare Abbildungen, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ messbar.

Im folgenden seien $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ immer mit der euklidischen Metrik versehen

$$d : K^n \times K^n \to K, \quad d((x_i), (y_i)) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/n} \qquad (K = \mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum. Wenn wir eine Abbildung

$$f : X \to K^n \quad (K = \mathbb{R} \text{ oder } K = \mathbb{C})$$

als messbar bezeichnen, soll das immer bedeuten, dass sie Borel–messbar ist.

Satz 1.12 Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.

a) Eine Abbildung $f = (g, h) : X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ist messbar genau dann, wenn $g : X \to \mathbb{R}^m$ und $h : X \to \mathbb{R}^n$ beide messbar sind.

b) Sind $f, g : X \to \mathbb{R}^m$ messbar, so ist auch $f + g : X \to \mathbb{R}^m$ messbar.

c) Ist $f : X \to \mathbb{R}^m$ messbar, so ist auch die Funktion $\|f\| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ messbar.

d) Mit $f, g : X \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist auch das Produkt $fg : X \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) messbar.

Um im Teil a) die Messbarkeit von f zu beweisen unter der Voraussetzung, dass f und g messbar sind, ist es nützlich sich zu überlegen, dass jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sich schreiben lässt als

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k \times W_k$$

mit geeigneten offenen Mengen $V_k \subset \mathbb{R}^m$ und $W_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$. Alle anderen Teile erhält man mit Hilfe von Bemerkung 1.11 (Teil b) und Teil c)).

Korollar 1.13 Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum. Dann gilt:

a) Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist messbar genau dann, wenn $\operatorname{Re} f : X \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ messbar sind.

b) Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar, so sind auch die Funktionen $\max(f, g) : X \to \mathbb{R}$ und $\min(f, g) : X \to \mathbb{R}$ messbar.

Die Eigenschaft der Borel–Messbarkeit bleibt bei punktweiser Konvergenz von Funktionenfolgen erhalten.

Satz 1.14 Seien $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Sind $f_k : X \to Y$ $(k \in \mathbb{N})$, $f : X \to Y$ Funktionen so, dass alle f_k Borel–messbar sind und ist

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x) \quad (x \in X),$$

so ist auch $f : X \to Y$ Borel–messbar.

Definition 1.15 Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und sei Y eine beliebige Menge. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt <u>einfach</u>, falls es paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathfrak{M}$ gibt mit $X = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ so, dass $f|A_i$ konstant ist für jedes $i = 1, \ldots, r$.

<u>Bemerkung</u> Ist (Y, d) ein metrischer Raum, so ist in der Situation von Definition 1.15 eine Funktion $f : X \to Y$ einfach genau dann, wenn sie Borel–messbar ist und die Bildmenge

$f(X) \subset Y$ endlich ist.

Messbare Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ lassen sich punktweise durch einfache Funktionen approximieren.

Satz 1.16 Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f : X \to K^n$ ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) ist messbar genau dann, wenn es eine Folge einfacher Funktionen $f_k = X \to K^n$ gibt mit

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad (x \in X).$$

Für eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ kann man folgendermaßen eine approximierende Folge einfacher Funktionen definieren. Sei $k \in \mathbb{N}^*$. Liegt $f(x)$ in einem der Intervalle

$$[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}) \quad (j \in [-k2^k, k2^k) \cap \mathbb{Z}),$$

so setzt man $f_k(x) = \frac{j}{2^k}$. In den übrigen $x \in X$ definiert man f_k durch

$$f_k(x) = k \text{ für } f(x) \geq k, \quad f_k(x) = -k \text{ für } f(x) < -k.$$

Bemerkung 1.17

a) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt, so konvergiert die Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ gleichmäßig auf X gegen f.

b) Ist $f : X \to \mathbb{R}_+$ messbar, so konvergiert die Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ punktweise monoton wachsend gegen f, d.h. für alle $x \in X$ gilt $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ ($k \in \mathbb{N}$) und

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Definition 1.18 Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und sei $Y \subset X$. Dann heißt die σ–Algebra (auf Y)

$$\mathfrak{M}|Y := \{A \cap Y;\ A \in \mathfrak{M}\}$$

die <u>von $\mathfrak{M}$ auf Y induzierte σ–Algebra</u> oder die <u>Spur–σ–Algebra von $\mathfrak{M}$ auf Y</u>.

Bemerkung 1.19 Seien $(X, \mathfrak{M})$, $(Z, \mathfrak{Z})$ messbare Räume und sei $f : X \to Z$ eine Abbildung.

a) Für $Y \in \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}|Y = \{A \in \mathfrak{M};\ A \subset Y\}$.

b) Ist $f : X \to Z$ messbar bzgl. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Z}$ und ist $Y \subset X$ beliebig, so ist $f|Y : Y \to Z$ messbar bzgl. $\mathfrak{M}|Y$ und $\mathfrak{Z}$.

c) Sei $Y \in \mathfrak{M}$. Eine Funktion $f : X \to Z$ ist messbar bzgl. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Z}$ genau dann, wenn $f|Y : Y \to Z$ messbar bzgl. $\mathfrak{M}|Y$ und $\mathfrak{Z}$ ist und $f|Y^c$ messbar bzgl. $\mathfrak{M}|Y^c$ und $\mathfrak{Z}$ ist.

Satz 1.20 Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und $f : X \to K$ ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) messbar. Dann ist die Funktion $g : X \to K$,

$$g(x) := \begin{cases} 1/f(x) & ; \text{ falls } f(x) \neq 0 \\ 0 & ; \text{ falls } f(x) = 0 \end{cases}$$

messbar.

Schreibweise: Für die in 1.20 definierte Funktion g schreibt man wieder $\frac{1}{f}$.

§2 Maße und μ–messbare Abbildungen

Sei $(X, \mathfrak{M})$ im folgenden ein messbarer Raum.

Definition 2.1 Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ heißt (positives) Maß auf $(X, \mathfrak{M})$, falls

(i) $\mu(\phi) = 0$,

(ii) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$ für jede Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen A_k in $\mathfrak{M}$.

Unter einem Maßraum verstehen wir ein Tripel $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bestehend aus einer Menge $X \neq \phi$, einer σ–Algebra $\mathfrak{M}$ auf X und einem Maß μ auf $(X, \mathfrak{M})$.

In (ii) sei für eine Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ definitionsgemäß $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k := \infty$, falls ein $c_k = \infty$ ist oder alle $c_k < \infty$ sind, aber $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ divergiert, und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k := \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{N} c_k$ sonst.

Bemerkung 2.2 Die Eigenschaft (ii) aus Definition 2.1 nennt man die σ–Additivität des Maßes μ. Ist μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{M})$ und sind $A_0, \ldots, A_r \in \mathfrak{M}$ paarweise disjunkt, so gilt insbesondere

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{r} A_k\right) = \sum_{k=0}^{r} \mu(A_k) \quad (:= \infty, \text{ falls } \mu(A_k) = \infty \text{ für ein } k).$$

Diese Eigenschaft von μ nennt man die endliche Additivität.

Beispiele 2.3

a) Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum. Dann nennt man das Maß

$$\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty],\ \mu(A) = \begin{cases} \sharp(A) & , \quad \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

das Zählmaß auf $(X, \mathfrak{M})$.

b) Ist $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und $x \in X$ ein beliebiger Punkt in X, so nennt man

$$\delta_x : \mathfrak{M} \to [0, \infty],\ \delta_x(A) := \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls } x \in A \\ 0 & , \quad \text{falls } \notin A \end{cases}$$

das Dirac–Maß in x auf $(X, \mathfrak{M})$.

c) Sei $(X, \mathfrak{M}) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Wir zeigen später (§5 und Lemma 7.1):
Es gibt ein eindeutig bestimmtes Maß $\lambda : B(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ mit

$$\lambda(I) = \text{"Länge von I"}$$

für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Dieses Maß heißt das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}$.

Sei X eine Menge und seien $A_k \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$, $A \subset X$ Teilmengen. Wir schreiben

$(A_k) \uparrow A$, falls $A_k \subset A_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt und $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$,
$(A_k) \downarrow A$, falls $A_{k+1} \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt und $A = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

Satz 2.4 Sei μ ein positives Maß auf $(X, \mathfrak{M})$, seien $A_k \in \mathfrak{M}$ $(k \in \mathbb{N})$, $A, B \in \mathfrak{M}$. Dann gilt:

a) Ist $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

b) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$ (Sub–σ–Additivität von μ)

c) Ist $(A_k) \uparrow A$, so gilt $\lim\limits_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

d) Ist $(A_k) \downarrow A$ und ist $\mu(A_{k_0}) < \infty$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim\limits_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

Die in c) und d) beschriebenen Eigenschaften von μ nennt man die Stetigkeit des Maßes μ von unten bzw. von oben.

Bemerkung: Einfache Beispiele zeigen, dass man im Teil d) die Bedingung, dass $\mu(A_{k_0}) < \infty$ für mindestens ein $k_0 \in \mathbb{N}$ ist, nicht ersatzlos streichen kann. Ist etwa $(X, \mathfrak{M}) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, so wird durch

$$\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty],\ \mu(A) = \begin{cases} \infty & ; \quad \text{falls } A \neq \phi \\ 0 & , \quad \text{falls } A = \phi \end{cases}$$

ein Maß definiert. Offensichtlich gilt $(0, \frac{1}{k}) \downarrow \phi$, aber

$$\lim_{k\to\infty} \mu((0, \frac{1}{k})) = \infty \neq \mu(\phi).$$

Sei $X \neq \phi$ eine Menge. Unter einer Zerlegung von X verstehen wir eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X so, dass $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ und $A_i \cap A_j = \phi$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

Sei im folgenden $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ immer ein Maßraum und E ein K–Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 2.5 Eine Funktion $f : X \to E$ heißt Treppenfunktion auf $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, falls es eine Menge $A \in \mathfrak{M}$ endlichen Maßes und eine endliche Zerlegung $(A_i)_{i=1}^r$ von A in Mengen $A_i \in \mathfrak{M}$ gibt derart, dass $f|A^c \equiv 0$ ist und $f|A_i$ konstant ist für jedes $i = 1, \ldots, r$.

In der Situation von Definition 2.5 nennen wir f Treppenfunktion bzgl. $(A_i)_{i=1}^r$. Wir lassen zu, dass $A_i = \phi$ für einige der Indizes $i = 1, \ldots, r$.

Bemerkung: Jede Treppenfunktion ist eine einfache Funktion. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Eine gegebene Funktion $f : X \to E$ ist eine Treppenfunktion genau dann, wenn sie eine einfache Funktion ist und $\mu(\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}) < \infty$.

Lemma 2.6 Die Menge

$$St(\mu, E) := \{f;\ f : X \to E \text{ ist Treppenfunktion auf } (X, \mathfrak{M}, \mu)\}$$

bildet bzgl. punktweiser Addition und skalarer Multiplikation einen K–Vektorraum.

Sind etwa $f, g \in St(\mu, E)$ Treppenfunktionen bzgl. $(A_i)_{i=1}^r$ und $(B_j)_{j=1}^s$, so definiere man $A := \bigcup\limits_{i=1}^r A_i$, $B := \bigcup\limits_{j=1}^s B_j$ und

$$A_{r+1} := (A \cup B) \setminus A, \quad B_{s+1} := (A \cup B) \setminus B.$$

Dann ist $\mathfrak{Z} = (A_i \cap B_j)_{\substack{1\leq i\leq r+1\\1\leq j\leq s+1}}$ eine Zerlegung von $A \cup B$ so, dass $f + g|(A_i \cap B_j)$ konstant ist für alle i und j. Da $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) < \infty$ nach Satz 2.4 b) ist, ist $f + g$ Treppenfunktion bzgl. $\mathfrak{Z}$.

Ganz ähnlich erhält man den ersten Teil des nächsten Ergebnisses.

Bemerkung 2.7

a) Ist $B : E \times F \to G$ eine Abbildung zwischen K–Vektorräumen derart, dass $B(0, 0) = 0$ ist (es genügt etwa, dass B K–bilinear ist), dann ist mit zwei Treppenfunktionen

$f : X \to E$ und $g : X \to F$ auch die Funktion

$$X \to G, \quad x \mapsto B(f(x),\, g(x))$$

eine Treppenfunktion.

b) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter K–Vektorraum, so ist mit jeder Treppenfunktion $f : X \to E$ auch die Funktion $\|f\| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ eine Treppenfunktion.

Zur Erinnerung an die Analysis II wiederholen wir die Definition des normierten Raumes.

Definition 2.8 Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

a) Ein normierter K–Vektorraum ist ein K–Vektorraum E zusammen mit einer Norm, d.h. einer Abbildung $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in E$ und $\alpha \in K$ gilt:

   (i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$;

   (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

   (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

b) Ein Banachraum ist ein normierter K–Vektorraum, der vollständig ist, d.h. in dem jede $\|\cdot\|$–Cauchy–Folge konvergiert.

Beispiele: $E = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit dem Betrag $|\cdot|$ als Norm, $E = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit der euklidischen Norm $\|(x_i)\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$ oder $E = C([0,1])$ mit der Supremum–Norm

$$\|f\|_{\infty,[0,1]} = \sup\{|f(x)|;\, x \in [0,1]\}$$

sind einfache Beispiele von Banachräumen.

Sei im folgenden $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Banachraum.

Definition 2.9

a) Eine Menge $N \in \mathfrak{M}$ heißt Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$. Eine Menge $A \in \mathfrak{M}$ heißt σ–endlich, falls es eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}$ gibt mit $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

b) Eine Abbildung $f : X \to E$ heißt μ–messbar, falls es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ gibt und eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $St(\mu, E)$ mit

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad (x \in X \setminus N).$$

Bemerkung 2.10

a) Da Maße sub–σ–additiv sind (Satz 2.4. b)), sind abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen.

b) Seien $f, g : X \to E$ Funktionen. Ist f μ–messbar und gibt es eine Nullmenge $Z \in \mathfrak{M}$ mit $g|Z^c = f|Z^c$, so ist g μ–messbar.

Viele Eigenschaften von Treppenfunktionen übertragen sich direkt auf μ–messbare Funktionen.

Lemma 2.11

a) Die Menge

$$\{f;\ f : X \to E \text{ ist } \mu\text{–messbar}\}$$

ist ein K–Vektorraum.

b) Mit $f : X \to E$ ist auch die Funktion $\|f\| : X \to \mathbb{R}$ μ–messbar.

c) Sind $f, g : X \to K$ μ–messbar, so ist auch das Produkt $fg : X \to K$ μ–messbar.

Aus der Definition der μ–Messbarkeit folgt als Anwendung von Satz 1.16, dass auf einem endlichen Maßraum (d.h. $\mu(X) < \infty$) jede messbare Funktion $f : X \to K^n$ auch μ–messbar ist. Diese Bemerkung lässt sich deutlich verbessern.

Satz 2.12 Für eine Abbildung $f : X \to K^n$ sind äquivalent:

(i) f ist μ–messbar;

(ii) es gibt eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$, eine σ–endliche Menge $A \in \mathfrak{M}$ und eine messbare Funktion $\tilde{f} : X \to K^n$ derart, dass $f|N^c = \tilde{f}|N^c$ und $f|A^c \equiv 0$.

Bemerkung: Die Einschränkung, dass der Bildraum von f ein endlich dimensionaler K–Vektorraum und nicht ein beliebiger Banachraum ist, benötigt man nur für die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) (um Satz 1.16 anwenden zu können).

Korollar 2.13 Ist $f : X \to K$ μ–messbar, so ist auch die Funktion

$$\frac{1}{f} : X \to K,\ (\frac{1}{f})(x) := \begin{cases} 1/f(x) & ;\ f(x) \neq 0 \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases}$$

wieder μ–messbar.

Korollar 2.14 Seien $f_k : X \to K^n$ $(k \in \mathbb{N})$, $f : X \to K^n$ Funktionen und sei $N \in \mathfrak{M}$ eine Nullmenge. Sind alle f_k $(k \in \mathbb{N})$ μ–messbar und ist

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad (x \in X \setminus N),$$

so ist f μ–messbar.

§3 Integrierbare Funktionen

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ im folgenden ein Maßraum und sei E ein Banachraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 3.1 Für $A \subset X$ nennt man die Funktion $\varkappa_A : X \to \mathbb{R}$,

$$\varkappa_A(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in A \\ 0 & ; \quad x \notin A \end{cases}$$

die <u>charakteristische Funktion</u> von A.

Bemerkung 3.2

a) Die charakteristische Funktion $\varkappa_A$ einer Menge $A \subset X$ ist messbar genau dann, wenn $A \in \mathfrak{M}$.

b) Bezeichnet man für $a \in E$ und $A \subset X$ mit $a\varkappa_A$ die Funktion

$$X \to E, \quad x \mapsto \begin{cases} a & ; \quad x \in A \\ 0 & ; \quad x \notin A, \end{cases}$$

so lässt sich jede einfache Funktion $f : X \to E$ schreiben als

$$f = \sum_{i=1}^{r} a_i \varkappa_{A_i}$$

mit geeigneten disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathfrak{M}$ und $a_1, \ldots, a_r \in E$.

Lemma 3.3 Durch $I : St(\mu, E) \to E$,

$$I(f) = \sum_{i=1}^{r} a_i \mu(A_i), \text{ falls } f \text{ Treppenfunktion bzgl. } (A_i)_{i=1}^r \text{ und } f|A_i \equiv a_i,$$

wird eine K–lineare Abbildung definiert.

Falls $A_i = \phi$ ist, wollen wir die Aussage "$f|A_i \equiv a_i$" als richtig interpretieren für alle $a_i \in K$ (vgl. die entsprechende Bemerkung im Anschluss an Definition 2.5).

Auf $\mathbb{R}$–wertigen Treppenfunktionen ist die oben definierte Linearform monoton.

Lemma 3.4 Für $f, g \in St(\mu, \mathbb{R})$ mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$ gilt

$$I(f) \leq I(g).$$

Der Beweis von Lemma 3.4 folgt direkt aus der Linearität von I, denn

$$I(g) = I(f) + I(g - f) \geq I(f).$$

Ist $f \in St(\mu, E)$ Treppenfunktion bzgl. $(A_i)_{i=1}^r$ und ist $A \in \mathfrak{M}$, so ist die Funktion $\varkappa_A f$ Treppenfunktion bzgl. $(A_i \cap A)_{i=1}^r$.

Definition 3.5 Für $f \in St(\mu, E)$ und $A \in \mathfrak{M}$ definiert man

$$\int_A f d\mu := I(f \varkappa_A).$$

Für eine beliebige Funktion $g : X \to E$ und eine beliebige Teilmenge $M \subset X$ bezeichnen wir die <u>Supremum–Norm von g auf M</u> mit

$$\|g\|_{\infty,M} := \sup\{\|g(x)\|;\ x \in M\} \in [0, \infty].$$

Bemerkung 3.6 Sei $f \in St(\mu, E)$ eine Treppenfunktion.

a) Ist $A \in \mathfrak{M}$ und ist $(A_j)_{j=1}^r$ eine Zerlegung von A in messbare Mengen $A_j \in \mathfrak{M}$, so gilt

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^r \int_{A_j} f d\mu.$$

b) Für $A \in \mathfrak{M}$ gilt

$$\|\int_A f d\mu\| \leq \int_A \|f\| d\mu \leq \|f\|_{\infty,A}\, \mu(A).$$

Lemma 3.7 Durch

$$St(\mu, E) \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_1 := \int_X \|f\| d\mu$$

wird eine <u>Halbnorm</u> auf dem K–Vektorraum $St(\mu, E)$ definiert, d.h. für alle f, g in $St(\mu, E)$ und $\alpha \in K$ gilt:

(i) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$;

(ii) $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\, \|f\|_1$;

(iii) $\|f\|_1 \geq 0$.

Definition 3.8 Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $St(\mu, E)$ heißt eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert so, dass

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Da $\|\int_X f_n \, d\mu - \int_X f_m \, d\mu\| \leq \|f_n - f_m\|_1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt (Bemerkung 3.6 b)), konvergiert für jede $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $St(\mu, E)$ die Folge $(\int_X f_k \, d\mu)_{k\in\mathbb{N}}$ in E.

Frage: Konvergiert eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge in irgendeinem Sinne als Funktionenfolge?

Satz 3.9 Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge in $St(\mu, E)$, so gibt es eine Teilfolge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ mit

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)$ existiert für alle $x \in X \setminus N$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists Z_\varepsilon \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(Z_\varepsilon) < \varepsilon$ derart, dass die Folge $(g_k|Z_\varepsilon^c)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

Die folgende Sprechweise vereinfacht die Formulierung vieler Ergebnisse in der Maßtheorie.

Definition 3.10 Seien $f_k : X \to E$ $(k \in \mathbb{N})$ und $f : X \to E$ Funktionen. Man sagt, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise μ–fast überall (pktw. μ–f.ü.) auf X gegen f konvergiert, falls es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ gibt mit

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad (x \in X \setminus N).$$

Satz 3.11 Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge in $St(\mu, E)$ so, dass

$$(f_k) \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0 \text{ pktw. } \mu - \text{f.ü.}$$

Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = 0.$$

Da die Differenz zweier $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folgen eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge ist, zeigt Satz 3.11 zusammen mit der Abschätzung aus Bemerkung 3.6 b), dass die folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 3.12 Eine Funktion $f : X \to E$ heißt μ–integrabel, falls eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge (f_k) in $St(\mu, E)$ existiert mit

$$(f_k) \overset{k}{\longrightarrow} f \quad \text{pktw. } \mu\text{–f.ü.}$$

In diesem Fall heißt

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu$$

das μ–Integral von f. Wir schreiben:

$$\mathcal{L}^1(\mu, E) := \{f;\ f : X \to E \text{ ist } \mu\text{–integrabel}\}.$$

Bemerkung:

a) $St(\mu, E) \subset \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und die neue Definition von $\int\limits_X f\, d\mu$ stimmt auf $St(\mu, E)$ mit der alten Definition überein.

b) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und ist $g : X \to E$ eine Funktion mit

$$f = g \quad \mu - \text{f.ü.},$$

d.h. gibt es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, so ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und $\int\limits_X g\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu$.

Die wichtigsten Eigenschaften des Integrals auf $St(\mu, E)$ übertragen sich auf das neu definierte Intgral auf $\mathcal{L}^1(\mu, E)$.

Lemma 3.13

a) Die Menge $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ ist ein K–Vektorraum (bzgl. punktweise definierter Addition und skalarer Multiplikation), und die Abbildung

$$\int : \mathcal{L}^1(\mu, E) \to E, \quad f \mapsto \int\limits_X f\, d\mu$$

ist K–linear.

b) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$, so ist $\|f\| \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$, und es gilt

$$\|\int\limits_X f\, d\mu\| \leq \int\limits_X \|f\| d\mu.$$

Wie über den Treppenfunktionen impliziert Lemma 3.13 die Monotonie des Maßintegrals auf den reell–wertigen integrierbaren Funktionen.

Korollar 3.14 Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ mit $f \leq g$ μ–f.ü. (d.h. es gebe eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$). Dann ist

$$\int\limits_X f\, d\mu \leq \int\limits_X g\, d\mu.$$

Wegen Lemma 3.13 darf man annehmen, dass $f \equiv 0$. Wählt man eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zu g wie in der Definition des μ–Integrals (3.12), so folgt, dass $(|g_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge in $St(\mu, \mathbb{R})$ ist mit

$$(|g_k|)_{k\in\mathbb{N}} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} |g| = g \text{ pktw. } \mu\text{–f.ü..}$$

Dann ist

$$\int_X g\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X |g_k| d\mu \geq 0.$$

Satz 3.15

a) Durch

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu, E) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|f\|_1 := \int_X \|f\| d\mu$$

wird eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ definiert (vgl. Lemma 3.7).

b) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ bzgl. dieser Halbnorm, d.h. gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_p - f_q\|_1 < \varepsilon$ für alle $p, q \geq N$, so existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0.$$

Dieser Satz zeigt, dass $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ bzgl. der Halbnorm $\|\cdot\|_1$ vollständig ist. Allerdings hatten wir Vollständigkeit bisher nur für normierte Räume definiert. Im folgenden werden wir sehen, wie man $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ durch Herausfaktorisieren eines geeigneten Unterraumes zu einem Banachraum machen kann.

Lemma 3.16 Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ eine Borel–messbare Funktion. Dann gilt für rede reelle Zahl $c > 0$ die Abschätzung

$$\mu(\{x \in X;\ \|f(x)\| \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\|f\|_1.$$

Die Abschätzung aus Lemma 3.16 nennt man die Tschebyscheff–Ungleichung.

Korollar 3.17 Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ ist $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ–f.ü. ist.

Indem wir den Nullraum der Halbnorm $\|\cdot\|_1$ herausdividieren, können wir $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ zu einem Banachraum machen.

Satz 3.18 Die Menge

$$N = \{f \in \mathcal{L}^1(\mu, E);\ \|f\|_1 = 0\}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mu, E)$. Der Quotientenvektorraum

$$L^1(\mu, E) := \mathcal{L}^1(\mu, E)/N = \{f + N;\ f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)\}$$

ist zusammen mit der Norm

$$\|f + N\|_1 := \|f\|_1$$

ein Banachraum.

Konvention: Seien $f_k, f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ $(k \in \mathbb{N})$. Wir schreiben $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ (oder $(f_k) \xrightarrow{k} f$), falls $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = 0$. Dies ist äquivalent zu der Konvergenz von

$$(f_k + N)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k} f + N \text{ in } L^1(\mu, E).$$

Man beachte, dass f hierdurch nur μ–f.ü. eindeutig bestimmt ist.

§4 Die Konvergenzsätze

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Banachraum über K ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Frage: Unter welchen Bedingungen kann man punktweise Konvergenz und Integration vertauschen?

Satz 4.1 Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ mit Limes $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$. Dann existiert eine Teilfolge (g_k) von (f_k) mit

(i) $(g_k) \xrightarrow{k} f$ pktw. μ–f.ü.,

(ii) für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $Z_\varepsilon \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(Z_\varepsilon) < \varepsilon$ so, dass $(g_k|Z_\varepsilon^c) \xrightarrow{(k\to\infty)} f|Z_\varepsilon^c$ gleichmäßig konvergiert.

Man beachte, dass Satz 4.1 eine Verallgemeinerung des Satzes 3.9 auf den Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ aller μ–integrablen Funktionen darstellt.

Korollar 4.2 Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ und $f : X \to E$ eine Funktion so, dass $(f_k) \xrightarrow{(k\to\infty)} f$ pktw. μ–f.ü. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = 0.$$

Zum Beweis benutze man, dass es nach Satz 3.15 b) ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ gibt mit

$$(\|g - f_k\|_1) \xrightarrow{k} 0.$$

Nach Satz 4.1 können wir eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auswählen mit $(f_{n_k}) \xrightarrow{k} g$ pktw. μ–f.ü. Dann ist $f = g$ μ–f.ü., und die Bemerkung nach Definition 3.12 zeigt, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ ist mit

$$(\|f - f_k\|_1)_{k\in\mathbb{N}} = (\|g - f_k\|_1)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k} 0.$$

Satz 4.3 (Satz von der monotonen Konvergenz)
Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{R})$ so, dass

(i) $f_k \le f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $(\int\limits_X f_k d\mu)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{R})$ mit $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ in $\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{R})$. Insbesondere ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X f_k d\mu = \int\limits_X f\, d\mu$ und

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ pktw. } \mu\text{–f.ü..}$$

Weiß man in der Situation von Satz 4.3 zusätzlich zu den Bedingungen (i) und (ii), dass

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = g(x)\ \mu\text{–f.ü.}$$

gilt für eine gegebene Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, so zeigt der Satz insbesondere, dass $g \in \mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{R})$ ist und dass $\lim\limits_{k\to\infty} \|g - f_k\|_1 = 0$.

Korollar 4.4 Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{R})$ so, dass ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{R})$ existiert mit

$$|f_k| \le g \quad \text{(punktweise) für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann sind $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k \in \mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{R})$ (punktweise gebildet) und

$$\int\limits_X (\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k) d\mu \ge \sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_X f_k d\mu, \qquad \int\limits_X (\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k) d\mu \le \inf_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_X f_k d\mu.$$

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz und dem gerade bewiesenen Korollar erhält man als zweiten wichtigen Konvergenzsatz den Satz von der majorisierten Konvergenz.

Satz 4.5 (Satz von der majorisierten Konvergenz)
Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mu, E)$, $g \in \mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{R})$ und $f : X \to E$ eine beliebige Funktion. Es gelte:

(i) $(f_k) \xrightarrow{k} f$ pktw. μ–f.ü.,

(ii) $\|f_k(x)\| \le g(x)$ für alle $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ in $\mathcal{L}^1(\mu, E)$.

Der letzte Satz zeigt, dass man Integration und punktweise Konvergenz vertauschen kann, wenn man zusätzlich noch zeigen kann, dass die betrachtete Folge (f_k) der Norm nach majorisiert wird durch eine geeignete reell–wertige integrable Funktion (Bedingung (ii) in Satz 4.5).

Korollar 4.6 Sei $f : X \to E$ eine μ–messbare Funktion.

a) Ist $\|f\| \leq g$ (punktweise) für ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$.

b) Es ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ genau dann, wenn $\|f\| \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$.

Das Korollar 4.6 beinhaltet ein nützliches Kriterium, um die Integrabilität konkreter Funktionen zu zeigen.

Korollar 4.7 Sei $f : X \to K^n$ eine beschränkte Borel–messbare Funktion mit

$$\mu(\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, K^n)$.

Nach Satz 2.12 ist f in der Situation von Korollar 4.7 μ–messbar. Setzt man

$$A = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\},$$

so folgt die Integrabilität mit Korollar 4.6 aus der Beobachtung, dass

$$\|f\| \leq \|f\|_{\infty,X} \varkappa_A \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}).$$

Korollar 4.8 Seien (X, d) ein metrischer Raum, μ ein positives Maß auf $\mathcal{B}(X)$ und E ein Banachraum. Sei $f : X \to E$ stetig so, dass eine kompakte Menge $K \subset X$ existiert mit $f|X \setminus K \equiv 0$ und $\mu(K) < \infty$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$.

§5 Das Lebesguemaß

Für ein endliches Intervall $\phi \neq I \subset \mathbb{R}$ bezeichne

$$L(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0, \infty)$$

die <u>Länge von I</u>. Ein <u>Quader</u> im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

$$R = \prod_{k=1}^{n} I_k$$

mit nicht–leeren endlichen Intervallen $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$. Wir nennen $V(R) = \prod\limits_{k=1}^{n} L(I_k)$ das <u>Volumen von R</u>. Ist $L(I_1) = L(I_2) = \ldots = L(I_n)$, so nennen wir R einen <u>Würfel</u>.

Wir suchen ein positives Maß λ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit

$$\lambda(R) = V(R)$$

für jeden Quader $R \subset \mathbb{R}^n$. Ist λ ein solches Maß und ist

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k$$

mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und Quadern $R_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$, so gilt (Satz 2.4 b))

$$\lambda(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(R_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} V(R_k).$$

Definition 5.1 Sei $X \neq \varnothing$ eine beliebige Menge. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{R}(X) \to [0, \infty]$ heißt äußeres Maß auf X, falls

(i) $\mu(\phi) = 0$,

(ii) für $A \subset B$ ist $\mu(A) \leq \mu(B)$,

(iii) für jede Folge $(A_k)_{k \geq 1}$ in $\mathcal{P}(X)$ gilt $\mu(\bigcup_{k \geq 1} A_k) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(A_k)$.

Wir werden zeigen, dass $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$,

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} V(R_k);\ (R_k)_{k \geq 1} \text{ ist eine Folge offener Quader mit } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\}$$

ein äußeres Maß definiert. Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathcal{C}_A := \{(R_k)_{k \geq 1};\ (R_k)_{k \geq 1} \text{ ist eine Folge offener Quader in } \mathbb{R}^n \text{ mit } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\}$$

.

Lemma 5.2 Die Abbildung λ^* ist ein äußeres Maß.

Auf den Quadern im $\mathbb{R}^n$ hat λ^* die gewünschten Werte.

Lemma 5.3 Für jeden Quader $R \subset \mathbb{R}^n$ ist $\lambda^*(R) = V(R)$.

Jedes äußere Maß induziert in kanonischer Weise ein Maß auf einer geeigneten σ–Algebra.

Satz 5.4 Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf einer Menge X. Dann ist

$$\mathfrak{M} = \{B \subset X;\ \mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) \text{ für alle } A \subset X\}$$

eine σ–Algebra auf X, und $\mu|\mathfrak{M}$ ist ein Maß.

Wendet man Satz 5.4 an auf das äußere Maß $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, so erhält man das Lebesgue–Maß.

Korollar 5.5 Die Menge

$$\mathfrak{M} = \{B \subset \mathbb{R}^n;\ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c) \text{ für alle } A \subset X\}$$

ist eine σ–Algebra auf $\mathbb{R}^n$ und $\lambda^*|\mathfrak{M}$ ist ein Maß.

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ nennt man die Lebesgue–messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Das zu Beginn dieses Paragraphen gestellte Problem wird gelöst durch den nächsten Satz.

Satz 5.6 Für das in Korollar 5.5 definierte Mengensystem gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}.$$

Bemerkung: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge mit $\lambda^*(B) = 0$, so folgt für alle $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap B^c) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c).$$

Also enthält $\mathfrak{M}$ alle Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^*(B) = 0$.

Definition 5.7 Wir nennen das positive Maß

$$\lambda = \lambda^*|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$$

das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}^n$ (Henri Lebesgue, 1875–1941).

Lemma 5.8 Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine beliebige Borelmenge. Dann gilt:

a) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U);\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ ist offen mit } U \supset A\}$,

b) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K);\ K \subset \mathbb{R}^n \text{ ist kompakt mit } K \subset A\}$.

Bemerkung: Ist $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ein positives Maß so, dass

$$\mu(U) = \lambda(U) \quad (U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen})$$

gilt, dann ist notwendigerweise $\mu = \lambda$. Zunächst folgt für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mu(A) \leq \inf\{\mu(U);\ U \supset A \text{ offen}\} = \inf\{\lambda(U);\ U \supset A \text{ offen}\} = \lambda(A).$$

Ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, so wähle man eine beschränkte offene Menge $V \supset A$ und beachte, dass

$$\mu(A) = \mu(V) - \mu(V \setminus A) \geq \lambda(V) - \lambda(V \setminus A) = \lambda(A).$$

Für eine beliebige Borelmenge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ schließlich folgt

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A \cap B_k(0)) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A \cap B_k(0)) = \lambda(A).$$

Aufgabe: Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $A \in \mathfrak{M}$. Wir bezeichnen mit ν die Einschränkung von μ auf die Spur–σ–Algebra $\mathfrak{M}|A$ (vgl. Definition 1.18 und Bemerkung 1.19). Seien $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und $g : A \to E$ Funktionen mit Werten in einem Banachraum E. Man zeige:

a) $f\varkappa_A \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$,

b) $f|A \in \mathcal{L}^1(\nu, E)$ und $\int\limits_A (f|A)d\nu = \int\limits_X f\varkappa_A d\mu$,

c) $g \in \mathcal{L}^1(\nu, E)$ genau dann, wenn die triviale Fortsetzung $\tilde{g} : X \to E$,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & ; \quad x \in A \\ 0 & ; \quad x \notin A \end{cases}$$

zu $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ gehört. In diesem Fall ist $\int\limits_A g\, d\nu = \int\limits_X \tilde{g}\, d\mu$.

Definition 5.9

a) Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir $\lambda|A := \lambda|(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|A)$, und

$$\mathcal{L}^1(A) := \mathcal{L}^1(\lambda|A, \mathbb{C}), \quad L^1(A) := L^1(\lambda|A, \mathbb{C}).$$

Ist E ein Banachraum, so definieren wir entsprechend

$$\mathcal{L}^1(A, E) := \mathcal{L}^1(\lambda|A, E), \quad L^1(A, E) := L^1(\lambda|A, E).$$

Für $f \in \mathcal{L}^1(A, E)$ schreiben wir $\int\limits_A f\, d\lambda := \int\limits_A f\, d(\lambda|A)$.

b) Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen seien

$C(U) := \{f;\ f : U \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$,
$C_c(U) := \{f \in C(U);\ \text{es gibt eine kompakte Menge } K \subset U \text{ mit } f|U \setminus K \equiv 0\}$.

Man beachte, dass für $f \in C_c(U)$ die triviale Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in U$ und $\tilde{f}(x) := 0$ für $x \notin U$, eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Lemma 5.10 Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset U$. Dann gilt:

a) Es gibt eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Abschluss $\bar{V}$ so, dass $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

b) Es gibt eine Funktion $f \in C_c(U)$ mit $f|K \equiv 1$ und $0 \leq f \leq 1$.

ber den offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(U)$ beliebig gut durch Funktionen in $C_c(U)$ approximieren bezüglich der $\mathcal{L}^1$–Halbnorm.

Satz 5.11 Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist $C_c(U) \subset \mathcal{L}^1(U)$ dicht (d.h. definitionsgemäß, dass für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(U)$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(U)$ existiert mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon$).

Als nächstes wollen wir für stetige Funktionen auf kompakten Quadern das Lebesgue–Integral mit dem iterierten Riemann–Integral vergleichen.

Sei $R = \prod_{\nu=1}^{n} [a_\nu, b_\nu]$ ein kompakter Quader im $\mathbb{R}^n$. Unter einer Teilung von R versteht man ein n–Tupel $T = (T_1, \dots, T_n)$ aus Teilungen T_ν von $[a_\nu, b_\nu]$. Sei

$$T_\nu = (t_{\nu,i})_{0 \le i \le r_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Wir definieren für die vorgegebene Teilung T von R die Spurweite von T durch

$$\omega(T) := \max_{\nu=1,\dots,n} \omega(T_\nu).$$

Wir benutzen die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
I := I(T) &:= \prod_{\nu=1}^{n} \{1, \dots, r_\nu\}, \\
\mathcal{T} &:= \left\{ \prod_{\nu=1}^{n} [t_{\nu,i_\nu-1}, t_{\nu,i_\nu}];\ i = (i_1, \dots, i_n) \in I \right\}, \\
R(i,T) &:= \prod_{\nu=1}^{n} [t_{\nu,i_\nu-1}, t_{\nu,i_\nu}] \quad (i \in I).
\end{aligned}$$

Ist $f : R \to \mathbb{C}$ stetig, so ist nach einem Ergebnis aus der Analysis II die Funktion

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} [a_\nu, b_\nu] \to \mathbb{C}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$$

stetig. Aus demselben Grunde ist

$$\prod_{\nu=1}^{n-2} [a_\nu, b_\nu] \to \mathbb{C}, \quad (x_1, \dots, x_{n-2}) \mapsto \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \Big(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n \Big) dx_{n-1}$$

stetig. Nach n-Schritten erhält man das iterierte Riemann–Integral von f

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 := \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \Big(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \Big) \dots dx_2 \right) dx_1.$$

Satz 5.12 Sei $R = \prod_{\nu=1}^{n} [a_\nu, b_\nu] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und sei $f : R \to \mathbb{C}$ stetig.

a) Es ist $\int\limits_R f\,d\lambda = \int\limits_{a_1}^{b_1} \dots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)dx_n \dots dx_1$.

b) Für jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ ist

$$\int\limits_R f\,d\lambda = \int\limits_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} \left(\dots \Big(\int\limits_{a_{\pi(n)}}^{b_{\pi(n)}} f(x_1,\dots,x_n)dx_{\pi(n)} \Big) \dots \right) dx_{\pi(1)}.$$

c) Ist $(T_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von Teilungen von R mit $\lim\limits_{k\to\infty} \omega(T_k) = 0$ und ist für jedes $k \geq 1$ und jedes $Q \in \mathcal{T}_k$ ein Punkt

$$\xi_{k,Q} \in Q$$

gewählt, so ist

$$\int\limits_R f\,d\lambda = \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in\mathcal{T}_k} f(\xi_{k,Q})V(Q).$$

§6 Der Satz von Fubini

Das iterierte Riemann–Integral stetiger Funktionen auf kompakten Quadern ist unabhängig von der Integrationsreihenfolge.

Frage: Kann man auch das Lebesgue–Integral von Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch iteriertes Integrieren nach den einzelnen Variablen ausrechnen?

Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $k \in \{1,\dots,n-1\}$ und schreiben

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \{(x',x'');\ x' \in \mathbb{R}^k \text{ und } x'' \in \mathbb{R}^{n-k}\}.$$

Wir bezeichnen mit λ', λ'' und λ die Lebesgue–Maße auf $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^{n-k}$ und $\mathbb{R}^n$.

Lemma 6.1 Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ sind

$$A_x := \{x'' \in \mathbb{R}^{n-k};\ (x,x'') \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-k}),$$

$$A^y := \{x' \in \mathbb{R}^k;\ (x',y) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Lemma 6.2 Für $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(N) = 0$ gibt es eine Menge $N' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ mit $\lambda'(N) = 0$ derart, dass für alle $x' \in \mathbb{R}^k \setminus N'$ gilt

$$\lambda''(N_{x'}) = 0.$$

Als einfaches Hilfsmittel benötigen wir das folgende Resultat.

Lemma 6.3 Jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ist gleichmäßig stetig.

Als Vorstufe des gewünschten Ergebnisses zeigen wir zunächst einen Spezialfall.

Satz 6.4 Ist $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so ist die Funktion

$$H : \mathbb{R}^k \to L^1(\mathbb{R}^{n-k}) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n-k})/N, \quad H(x') = h(x', \cdot) + N$$

stetig und verschwindet außerhalb einer kompakten Menge. Insbesondere gilt:

a) $H \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k, L^1(\mathbb{R}^{n-k}))$;

b) $\tilde{H} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C};\ x' \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} h(x', \cdot) d\lambda''$ liegt in $C_c(\mathbb{R}^k)$;

c) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} h\, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} h(x', x'') d\lambda''(x'') \Big) d\lambda'(x')$.

Indem man die Dichtheit von $C_c(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (Satz 5.11) ausnutzt, erhält man eine allgemeinere Version des gesuchten Satzes.

Satz 6.5 (Satz von Fubini) Zu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine λ'–Nullmenge $Z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ mit

$$f(x', \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n-k}) \quad (x' \in \mathbb{R}^k \setminus Z)$$

so, dass $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$,

$$G(x') = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x', \cdot) d\lambda'' & ; \quad x' \notin Z \\ 0 & ; \quad x' \in Z \end{cases}$$

eine Funktion $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k)$ definiert mit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}^k} G(x') d\lambda'.$$

Bemerkung 6.6

a) In Satz 6.5 kann man für Z jede λ'–Nullmenge in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ wählen mit

$$f(x', \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n-k}) \quad (x' \in \mathbb{R}^k \setminus Z).$$

Man kann die Funktion G auch ersetzen durch $\tilde{G} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$,

$$\tilde{G}(x') = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x', \cdot) d\lambda'' & , \quad \text{falls } f(x', \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n-k}) \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Alle so resultierenden Funktionen $G, \tilde{G}, \ldots$ sind λ'–f.ü. gleich (siehe die Bemerkung im Anschluss an Definition 3.12).

b) Indem man die Rollen von x' und x'' überall vertauscht, erhält man eine Version des Satzes von Fubini mit umgekehrter Integrationsreihenfolge.

Schreibweise 6.7 Die Formel in Satz 6.5 schreibt man üblicherweise als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x', x'') d\lambda''(x'') \Big) d\lambda'(x')$$

mit der Konvention, dass das innere Integral als Null zu lesen ist für alle $x' \in \mathbb{R}^k$ mit $f(x', \cdot) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n-k})$.

Durch triviales Fortsetzen aller Funktionen erhält man eine Version des Satzes von Fubini mit allgemeineren Integrationsbereichen.

Korollar 6.8 Seien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-k})$. Dann ist $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und für $f \in \mathcal{L}^1(A \times B)$ gilt (mit der obigen Konvention)

$$\int_{A \times B} f\, d\lambda = \int_A \Big(\int_B f(x', x'') d\lambda''(x'') \Big) d\lambda'(x').$$

Beispiel 6.9 Seien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (d.h. $k = n-1$). Sei $g : A \to \mathbb{R}$ Borel–messbar und $f \in \mathcal{L}^1(A \times B)$. Dann ist

$$C = \{(x', x_n) \in A \times B;\ x_n \leq g(x')\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\int_C f\, d\lambda = \int_A \Big(\int_{B \cap (-\infty, g(x')]} f(x', x_n) d\lambda''(x_n) \Big) d\lambda'(x').$$

Als Anwendung berechnen wir einige konkrete Volumina.

Beispiel 6.10

a) Seien $K' \subset \mathbb{R}^k$, $K'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ kompakt. Dann ist $\lambda(K' \times K'') = \lambda'(K')\lambda''(K'')$.

b) <u>(Cavalierisches Prinzip)</u> Ist $K \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ kompakt, so ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Menge $K^t = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1};\ (x', t) \in K\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und

$$\lambda(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda'(K^t) d\lambda''(t).$$

Wir zeigen später (Korollar 7.11), dass für alle Borel–Mengen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und alle $c > 0$ gilt

$$\lambda(cA) = c^n \lambda(A) \quad (:= \infty \text{ für } \lambda(A) = \infty).$$

Mit dieser Formel können wir weitere Beispiele behandeln.

c) Sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $h > 0$. Dann heißt die kompakte Menge

$$K = C_h(B) = \{((1-\lambda)x,\, \lambda h);\; x \in B \text{ und } 0 \le \lambda \le 1\}$$

ein Kegel mit Basis B und Höhe h. Es ist $K^t = \varnothing$ für $t < 0$ oder $t > h$ und

$$K^t = (1 - \frac{t}{h})B \quad \text{für} \quad 0 \le t \le h.$$

Mit dem Cavalierischen Prinzip und der Teil c) vorausgehenden Bemerkung folgt

$$\begin{aligned}\lambda(K) &= \int_{[0,h]} \lambda'((1-\tfrac{t}{h})B)d\lambda''(t) = \lambda'(B)\int_0^h (1-\tfrac{t}{h})^{n-1}dt \\ &= -\lambda'(B)\tfrac{h}{n}(1-\tfrac{t}{h})^n\big|_0^h = \tfrac{h}{n}\lambda'(B).\end{aligned}$$

Benutzt wurde die Gleichheit von Lebesgue– und Riemann–Integral für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen (Satz 5.12).

d) (Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel) Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $r > 0$ sei

$$K_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\; \|x\| \le r\} < \mathbb{R}^n$$

die abgeschlossene euklidische Kugel um 0 mit Radius r. Wegen $\lambda(K_n(r)) = r^n\lambda(K_n(1))$ genügt es, das Volumen $\tau_n = \lambda(K_n(1))$ der abgeschlossenen Einheitskugel zu berechnen. Dies geschieht induktiv unter Benutzung des Cavalierischen Prinzips. Es ist für $n \ge 2$ und $t \in \mathbb{R}$

$$K_n(1)^t = K_{n-1}(\sqrt{1-t^2}) \text{ für } |t| \le 1, \quad K_n(1)^t = \varnothing \text{ für } |t| > 1.$$

Aus Teil b) folgt

$$\begin{aligned}\lambda(K_n(1)) &= \int_{[-1,+1]} \lambda'(K_{n-1}(\sqrt{1-t^2}))d\lambda(t) \\ &= \tau_{n-1}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt = 2\tau_{n-1}\int_0^1(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt = \\ &= 2\tau_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)dt.\end{aligned}$$

Setzt man

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt \quad (n \in \mathbb{N}),$$

so folgt mit partieller Integration die Rekursionsformel (Forster I, S.147)

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \ge 2).$$

Wegen $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = 1$ ist

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \tfrac{2n-1}{2n} \tfrac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \tfrac{1}{2} \tfrac{\pi}{2} \quad (n \geq 0), \\ I_{2n+1} &= \tfrac{2n}{2n+1} \tfrac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \tfrac{2}{3} 1 \quad (n \geq 0). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$I_{n+1}\, I_n = \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2} \quad (n \geq 0)$$

und schließlich

$$\tau_{n+2} = 2\tau_{n+1} I_{n+2} = 4\tau_n I_{n+2} I_{n+1} = \frac{2\pi}{n+2} \tau_n \quad (n \geq 1).$$

Hieraus ergibt sich durch Unterscheiden des geraden und ungeraden Falles

$$\tau_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}\ (n \geq 1), \quad \tau_{2n+1} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}\ (n \geq 1).$$

Insbesondere ist $\lambda(K_2(r)) = \pi r^2$ und $\lambda(K_3(r)) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

e) (Rotationskörper) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ $(a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b)$ eine stetige Funktion. Dann ist $K := \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2;\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ kompakt und man erhält durch Anwendung von Fubini wie im Cavalierischen Prinzip

$$\lambda(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

ä§7 Die Transformationsformel

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathcal{C}_k := \{\prod_{\nu=1}^{n} [\frac{j_\nu}{2^k}, \frac{j_\nu + 1}{2^k});\ (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Dann läßt sich der Raum $\mathbb{R}^n$ schreiben als die disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{R}^n = \bigcup (Q;\ Q \in \mathcal{C}_k).$$

Wir setzen $\mathcal{C} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_k$.

Lemma 7.1 Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich schreiben als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Würfel $Q \in \mathcal{C}$ mit $\overline{Q} \subset U$.

Als Folgerung hieraus und der Bemerkung im Anschluss an Lemma 5.8 erhält man sofort, dass das Lebesgue–Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ das einzige Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, das jedem Würfel im $\mathbb{R}^n$ sein Volumen zuordnet.

Korollar 7.2 Sei λ^* das in §5 konstruierte äußere Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Dann ist $\lambda^*(A) = 0$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge kompakter Würfel $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k \geq 1)$ existiert mit $A \subset \bigcup\limits_{k \geq 1} Q_k$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(Q_k) < \varepsilon.$$

Definition 7.3 Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>Lebesgue–Nullmenge</u>, falls $\lambda^*(A) = 0$.

Indem man benutzt, dass C^1–Funktionen lokal Lipschitz sind, erhält man den folgenden wichtigen Satz über Lebesgue–Nullmengen.

Satz 7.4 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Ist $A \subset U$ eine Lebesgue–Nullmenge, so ist $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue–Nullmenge.

Wir wollen eine Substitutionsregel für Lebesgue–Integrale beweisen, die im wesentlichen die entsprechende Formel für das 1–dimensionale Riemann–Integral verallgemeinert. Ein wichtiger Spezialfall ist im nächsten Ergebnis enthalten.

Satz 7.5 Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv. Dann gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\lambda(TB) = |\det T| \lambda(B).$$

Bevor wir allgemeinere Versionen der mehrdimensionalen Substitutionsregel beweisen können, benötigen wir ein technisches Lemma, das eng mit dem Prinzip der lokalen C^k–Invertierbarkeit aus der Analysis II zusammenhängt.

Für $r > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$ sei (mit $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$)

$$U_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\|_\infty < r\} \quad \text{und} \quad \overline{U}_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\|_\infty \leq r\}.$$

Lemma 7.6 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{U}_r(a) \subset U$. Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit $J_f(a) = E_n$ (Einheitsmatrix) und ist $0 < s < 1$ mit

$$\|J_f(x) - E_n\| \leq s/\sqrt{n} \quad \text{für} \ \ x \in \overline{U}_r(a),$$

so gibt es für jeden Vektor $y \in \overline{U}_{(1-s)r}(f(a))$ genau ein $x \in \overline{U}_r(a)$ mit $f(x) = y$
.

Definition 7.7 Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und sei $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Eine bijektive Abbildung $f : U \to V$ heißt <u>C^k–invertierbar</u> (oder <u>C^k–Diffeomorphismus</u>), falls die Funktion f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} beide C^k–Funktionen sind.

Satz 7.8 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ C^1–invertierbar und sei $R \subset U$ ein kompakter Würfel. Dann gilt

$$\lambda(f(R)) = \int\limits_R |\det J_f(x)| d\lambda(x).$$

Aus diesem Satz folgt zunächst die stetige Version der gesuchten Transformationsformel.

Korollar 7.9 Sei $f : U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Für jede Funktion $g \in C_c(V)$ gilt

$$\int\limits_V g d\lambda = \int\limits_U g \circ f |\det J_f| d\lambda.$$

Indem man ausnutzt, dass $C_c(V)$ dicht ist in $\mathcal{L}^1(V)$, erhält man die endgültige Version der Transformationsformel.

Satz 7.10 (Transformationsformel) Sei $f : U \to V$ eine C^1–invertierbare Abbildung zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und sei $g : V \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist $g \in \mathcal{L}^1(V)$ genau dann, wenn $g \circ f |\det J_f| \in \mathcal{L}^1(U)$ ist. In diesem Fall gilt:

$$\int\limits_V g d\lambda = \int\limits_U g \circ f |\det J_f| d\lambda.$$

Wir benutzen zunächst die Transformationsformel, um die in Beispiel 6.10 gelassene Lücke zu schließen.

Korollar 7.11 Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda(rA + x_0) = |r|^n \lambda(A),$$

wobei $c \cdot \infty := \infty$ sei für $c > 0$.

Eine nützliche Anwendung der Transformationsformel ist die Formel zur Substitution durch Polarkoordinaten.

Korollar 7.12 (Ebene Polarkoordinaten) Es sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\rho(r, \varphi) = (r \cos \varphi,\ r \sin \varphi).$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ liegt in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ genau dann, wenn die Funktion

$$h : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad (r, \varphi) \mapsto f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)r$$

zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi])$ gehört. In diesem Fall ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]} h d\lambda = \int\limits_{[0,2\pi]} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} h(r, \varphi) d\lambda(r) \Big) d\lambda(\varphi).$$

Korollar 7.13 (Räumliche Polarkoordinaten) Sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi,\, r\sin\vartheta\sin\varphi,\, r\cos\vartheta).$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ liegt in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$ genau dann, wenn die Funktion

$$h : \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad (r, \vartheta, \varphi) \mapsto f(\rho(r, \vartheta, \varphi))r^2 \sin\vartheta$$

zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi])$ gehört. In diesem Fall ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}_+\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} h d\lambda = \int\limits_{[0,2\pi]} \left(\int\limits_{[0,\pi]} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} h(r, \vartheta, \varphi) d\lambda(r) \Big) d\lambda(\vartheta) \right) d\lambda(\varphi).$$

2 Integralsätze

§8 Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$

Seien $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ und $p \in \{0, \ldots, n\}$. Wie bisher sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik $d(x, y) = (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{1/2}$. Auf jeder Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die induzierte Metrik

$$d|M : M \times M \to \mathbb{R}, \quad (d|M)(x, y) = d(x, y).$$

Eine Teilmenge $U \subset M$ ist offen als Teilmenge des metrischen Raumes $(M, d|M)$ genau dann, wenn es eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $U = V \cap M$.

Definition 8.1

a) Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume. Eine bijektive Abbildung $\varphi : X \to X'$ heißt Homöomorphismus, falls φ und φ^{-1} beide stetig sind.

b) Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so nennen wir

$$\operatorname{rg}(T) = \dim T(\mathbb{R}^n)$$

den Rang von T.

Satz 8.2 Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$. Für $0 < p < n$ sind äquivalent:

(i) Es gibt einen C^k–Diffeomorphismus $f : V \to W$ zwischen offenen Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$ von a und $W \subset \mathbb{R}^n$ von $0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f(a) = 0$ und

$$f(M \cap V) = \{y \in W;\ y_{p+1} = \ldots = y_n = 0\}.$$

(ii) Nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^p$ von $(a_1, \ldots, a_p)$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine Funktion $\varphi \in C^k(W, \mathbb{R}^{n-p})$ so, dass $\varphi(a_1, \ldots, a_p) = (a_{p+1}, \ldots, a_n)$ und

$$M \cap V = \{(x, \varphi(x));\ x \in W\}.$$

(iii) Es gibt offene Umgebungen $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ von $0 \in \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^n$ von a und einen Homöomorphismus $g : \Omega \to M \cap V$ (versehen mit der Metrik $d|M \cap V$) so, dass $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^k–Funktion ist mit $g(0) = a$ und $\operatorname{rg}(g'(0)) = p$.

In (ii) ist gemeint, dass eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ existiert so, dass mit

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (x_i)_{i=1}^n \mapsto (x_{\pi(i)})_{i=1}^n$$

alle Aussagen von (ii) richtig werden für $\tilde{M} = \Phi(M)$ statt M und $\tilde{a} = \Phi(a) \in \tilde{M}$ statt $a \in M$.

Bemerkung 8.3

a) Für $p = 0$ macht die Bedingung (i) aus Satz 8.2 Sinn und ist äquivalent zur Existenz einer offenen Umgebung V von a mit $V \cap M = \{a\}$. In diesem Fall nennt man a einen isolierten Punkt von M. Für $p = n$ machen die Bedingungen (i) und (iii) aus Satz 8.2 Sinn und sind beide äquivalent zur Existenz einer offenen Umgebung V von a mit $V \subset M$ (d.h. diese Bedingungen gelten im Fall $p = n$ genau dann, wenn a innerer Punkt von M ist).

b) Sei $g : \Omega \to M \cap V$ eine Abbildung wie in Teil (iii) von Satz 8.2 und sei $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $(0, a)$. Indem man ausnutzt, dass g stetig und offen ist, kann man offene Umgebungen $\Omega_0 \subset \Omega$ von $0 \in \mathbb{R}^p$ und $V_0 \subset V$ von a wählen mit $g(\Omega_0) = M \cap V_0$ und $\Omega_0 \times V_0 \subset U$. Anders ausgedrückt, durch "Verkleinern" kann man in Bedingung (iii) immer erreichen, dass $\Omega \times V$ in einer beliebig kleinen vorgegebenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ von $(0, a)$ liegt.

c) Sei wieder $g : \Omega \to M \cap V$ eine Abbildung wie in Bedingung (ii) aus Satz 8.2. Dann gibt es Indizes $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$ so, dass

$$\Big(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x_r}(0)\Big)_{1\leq\mu,\nu\leq p} \in GL(p,\mathbb{R})$$

ist. Da $GL(p,\mathbb{R}) \subset M(p \times p,\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge ist (Analysis II) und da g mindestens C^1 ist, gibt es eine offene Umgebung $\Omega_0 \subset \Omega$ von $0 \in \mathbb{R}^p$ mit

$$\Big(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x_\nu}(x)\Big)_{1\leq\mu,\nu\leq p} \in GL(p,\mathbb{R}) \quad (x \in \Omega_0).$$

Durch Verkleinern von Ω kann man also immer erreichen, dass zusätzlich gilt

$$\mathrm{rg}(g'(x)) = p \quad (x \in \Omega).$$

Definition 8.4

a) Eine Teilmenge $\phi \neq M \subset \mathbb{R}^n$ heißt p–dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k, falls für alle $a \in M$ die Bedingung (i) aus Satz 8.2 erfüllt ist.

b) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p–dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k mit $p \geq 1$. Ein Homöomorphismus $g : \Omega \to V$ zwischen einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ und einer offenen Teilmenge $V \subset M$ (bezüglich $d|M$), für den $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^k–Funktion ist mit

$$\mathrm{rg}(g'(x)) = p$$

für alle $x \in \Omega$ heißt Parametrisierung (oder Karte) von M. (Symbolisch schreiben wir hierfür oft $g : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$).

Satz 8.5 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in M$ ein beliebiger Punkt. Für $0 \leq p < n$ ist die Bedingung (i) aus Satz 8.2 äquivalent zu der Bedingung:

(iv) Es gibt eine offene Umgebung U von a und eine Funktion $h \in C^k(U,\mathbb{R}^{n-p})$ mit

$$M \cap U = \{x \in U;\ h(x) = 0\} \quad \text{und } \mathrm{rg}\, h'(a) = n - p.$$

(Durch Verkleinern von U kann man immer erreichen, dass sogar $\mathrm{rg}\, h'(x) = n - p$ für alle $x \in U$ gilt).

Folgerung 8.6 Die $(n-1)$–dimensionalen C^k–Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ (auch C^k–Hyperflächen genannt) sind genau die Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$, die lokal Nullstellenmenge einer $\mathbb{R}$–wertigen C^k–Funktion mit nicht verschwindendem Gradienten sind. Ein Beispiel ist

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\} \quad ((n-1)\text{–Sphäre}).$$

Mit $U = \mathbb{R}^n$ und $h : U \to \mathbb{R}$, $h(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$ ist

$$S^{n-1} = \{x \in U;\ h(x) = 0\} \quad \text{und } \mathrm{grad}\, h(x) = 2x \neq 0 \text{ für alle } x \in S^{n-1}.$$

Lemma 8.7 (Kartenwechsel) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p–dimensionale C^k–Untermannigfaltigkeit mit $p \geq 1$ und seien

$$g_j : \Omega_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M \quad (j = 1, 2)$$

Karten von M mit $V = V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Dann sind die Mengen $W_j = g_j^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^p$ für $j = 1, 2$ und $\tau = g_2^{-1} \circ g_1 : W_1 \to W_2$ ist ein C^k–Diffeomorphismus.

Definition 8.8 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p–dimensionale C^k–Untermannigfaltigkeit ($p \geq 1$) und seien

$$g_j : \Omega_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M \quad (j = 1, 2)$$

zwei Karten mit $V = V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Dann heißt der C^k–Diffeomorphismus

$$\tau = \tau(g_1, g_2) : g_1^{-1}(V) \to g_2^{-1}(V), \quad x \mapsto g_2^{-1}(g_1(x))$$

der zugehörige Kartenwechsel (oder Parameterwechsel).

Sei im folgenden $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p–dimensionale C^k–Untermannigfaltigkeit mit $1 \leq p \leq n$. Wir wollen versuchen, Funktionen $f : M \to \mathbb{C}$ zu integrieren, indem wir sie lokal mit Hilfe von Karten $g : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$ zurückziehen und dann die so resultierenden Funktionen über dem Parameterbereich Ω integrieren. Wie sich die entstehenden Integrale bei einem Kartenwechsel ändern, beschreibt die Transformationsformel (Satz 7.10).

Definition 8.9 Sei $g : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$ eine Karte von M. Unter der Gramschen Determinante (oder dem Maßtensor) von g versteht man die Abbildung

$$G : \Omega \to \mathbb{R}, \quad G(x) = \det(J_g(x)^t J_g(x)).$$

Man beachte, dass $G \in C^{k-1}(\Omega)$. Als nächstes wollen wir klären, welche Beziehung besteht zwischen den Maßtensoren verschiedener Karten.

Lemma 8.10 Seien $g_j : \Omega_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M$ ($j = 1, 2$) Karten von M mit $V = V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ und sei $\tau : W_1 \to W_2$, $\tau(x) = g_2^{-1}(g_1(x))$ ($W_j = g_j^{-1}(V)$) der zugehörige Kartenwechsel. Dann gilt für die Maßtensoren G_1 und G_2 von g_1, g_2 die Beziehung

$$G_1(x) = G_2(\tau(x)) \, (\det J_\tau(x))^2 \quad (x \in W_1).$$

Für die Berechnung von Maßtensoren ist die folgende Formel aus der Linearen Algebra nützlich.

Lemma 8.11 Sei $1 \leq p \leq n$ und seien $A, B \in M\,(n \times p, K)$ Matrizen über einem beliebigen Körper K. Für $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$A_{i_1 \ldots i_p} = (a_{i_\mu, \nu})_{1 \leq \mu, \nu \leq p} \in M(p \times p, K)$$

und entsprechend sei $B_{i_1\dots i_p}$ definiert. Dann ist

$$\det(A^t B) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \det(A_{i_1\dots i_p})\det(B_{i_1\dots i_p}).$$

Korollar 8.12 Ist $g : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$ eine Karte von M und $G : \Omega \to \mathbb{R}$ ihr Maßtensor, so gilt

$$G(x) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \left[\det\left(\frac{\partial g_{i_\mu}}{\partial x_\nu}(x)\right)_{1\le\mu,\nu\le n}\right]^2 > 0$$

für alle $x \in \Omega$.

§9 Integration über Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p–dimensionale C^k–Untermannigfaltigkeit $(1 \le p \le n)$. Der metrische Raum $(M, d|M)$ sei mit seiner Borelschen σ–Algebra (Beispiel 1.6) $\mathcal{B}(M)$ versehen. Ist

$$g : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

eine Karte, so ist $g : \Omega \to M$ messbar bezüglich $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)|\Omega$ und $\mathcal{B}(M)$.

Lemma 9.1 Ist $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sind $g_j : \Omega_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M$ $(j = 1, 2)$ Karten von M (mit zugehörigen Maßtensoren G_j) derart, dass $f|M\backslash V_j \equiv 0$ ist für $j = 1, 2$, so ist $f \circ g_1\sqrt{G_1} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1)$ genau dann, wenn $f \circ g_2\sqrt{G_2} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2)$ ist. In diesem Fall gilt:

$$\int\limits_{\Omega_1} f \circ g_1\sqrt{G_1}d\lambda = \int\limits_{\Omega_2} f \circ g_2\sqrt{G_2}d\lambda.$$

Zum Beweis wendet man die Transformationsformel auf den zugehörigen Kartenwechsel an und benutzt das in Lemma 8.10 formulierte Ergebnis über das Verhalten der Maßtensoren beim Kartenwechsel.

Definition 9.2 Ist $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion so, dass eine Karte $g : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$ existiert mit $f|M \setminus V \equiv 0$, so nennt man f <u>integrierbar über M</u>, falls

$$f \circ g\sqrt{G} \in \mathcal{L}^1(\Omega).$$

In diesem Fall definiert man das <u>Integral von f über M</u> durch

$$\int\limits_M f\,dS = \int\limits_\Omega f \circ g\sqrt{G}d\lambda.$$

Die Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl der Karte g wurde in Lemma 9.1 gezeigt. Um Funktionen integrieren zu können, die nicht auf dem Bildbereich einer einzigen Karte konzentriert sind, benutzen wir den Begriff der messbaren Zerlegung der Eins.

Definition 9.3 Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und seien $U_j \subset M$ $(j = 1, \ldots, r)$ offen mit

$$\{x \in M;\ f(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{j=1}^{r} U_j.$$

Eine <u>messbare Zerlegung der Eins</u> bezüglich $(U_j)_{j=1}^r$ und f ist eine Folge $(\alpha_j)_{j=1}^r$ messbarer Funktionen $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$ mit

(i) $0 \leq \alpha_j \leq 1 \quad (j = 1, \ldots, r)$,

(ii) $\alpha_j | M \setminus U_j \equiv 0 \quad (j = 1, \ldots, r)$,

(iii) $\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j(x) = 1$ für $x \in M$ mit $f(x) \neq 0$.

Bemerkung 9.4 In der Situation von Definition 9.3 bilden die Funktionen

$$\alpha_j = \varkappa_{W_j} \text{ mit } W_j = U_j \cap (U_1 \cup \ldots \cup U_{j-1})^c \quad (j = 1, \ldots, r)$$

eine messbare Zerlegung der Eins bezüglich $(U_j)_{j=1}^r$ und f.

Lemma 9.5 Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion, seien

$$\begin{array}{ll} g_j : \Omega_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M & (j = 1, \ldots, r), \\ \tilde{g}_k : \tilde{\Omega}_k \longrightarrow \tilde{V}_k \subset M & (k = 1, \ldots, s) \end{array}$$

Karten von M mit

$$\{x \in M;\ f(x) \neq 0\} \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{r} V_j\Big) \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{s} \tilde{V}_k\Big)$$

und seien $(\alpha_j)_{j=1}^r$, $(\beta_k)_{k=1}^s$ messbare Zerlegungen der Eins bezüglich $(V_j)_{j=1}^r$ bzw. $(\tilde{V}_k)_{k=1}^s$ und f. Dann sind alle Funktionen $\alpha_j f$ $(j = 1, \ldots, r)$ integrierbar über M genau dann, wenn alle Funktionen $\beta_k f$ $(j = 1, \ldots, r)$ integrierbar über M sind. In diesem Fall ist

$$\sum_{j=1}^{r} \int_M \alpha_j f \, dS = \sum_{k=1}^{s} \int_M \beta_k f \, dS.$$

Definition 9.6 Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$, für die endlich viele Karten $g_k : \Omega_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M$ $(j = 1, \ldots, r)$ existieren mit

$$\{x \in M;\ f(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{j=1}^{r} V_j,$$

heißt integrierbar über M, falls eine messbare Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{j=1}^r$ bezüglich $(V_j)_{j=1}^r$ und f existiert so, dass alle $\alpha_j f$ $(j = 1, \ldots, r)$ integrierbar über M im Sinne von Definition 9.2 sind. In diesem Fall definieren wir das Integral von f über M durch

$$\int_M f\, dS = \sum_{j=1}^r \int_M \alpha_j f\, dS.$$

Die Wohldefiniertheit und die Konsistenz dieser Definition mit Definition 9.2 folgt aus Lemma 9.5. Ist $f : M \to \mathbb{C}$ integrierbar über M, so zeigen die Bemerkung 9.4 und Lemma 9.5 insbesondere, dass $f \circ g\sqrt{G} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ist für jede Karte $g : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$.

Frage: Wie groß ist die Menge der über M integrierbaren Funktionen?

Wir zeigen, dass sie die Menge

$$C_c(M) = \{f;\ f : M \to \mathbb{C} \text{ ist stetig und es gibt } K \subset M \text{ kompakt mit } f|M \setminus K \equiv 0\}$$

enthält.

Bemerkung. Eine Menge $K \subset M$ ist kompakt im metrischen Raum $(M, d|M)$ genau dann, wenn sie kompakt in $\mathbb{R}^n$ ist.

Satz 9.7 Ist $f : M \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, Borel–messbare Funktion so, dass $f|M \setminus K \equiv 0$ ist außerhalb einer kompakten Menge $K \subset M$, so ist f über M integrierbar. Insbesondere ist jede Funktion $f \in C_c(M)$ integrierbar über M.

Definition 9.8 Ist $A \subset M$ eine Menge, für die $\varkappa_A : M \to \mathbb{C}$ integrierbar über M ist, so nennt man

$$\mathrm{Vol}_p(A) = \int_M \varkappa_A dS$$

das p–dimensionale Volumen von A.

Bemerkung. Nach Satz 9.7 hat jede Menge $A \in \mathcal{B}(M)$, die in einem Kompaktum $K \subset M$ enthalten ist, ein Volumen in diesem Sinne.

Eine Menge $A \in \mathcal{B}(M)$ nennt man Nullmenge, falls $\lambda(g^{-1}(A)) = 0$ ist für jede Karte $g : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$ von M.

Lemma 9.9 Es gebe endlich viele Karten, deren Bilder M überdecken. Es seien $g_j : \Omega_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M$ $(1 \leq j \leq r)$ Karten mit $V_i \cap V_j = \varnothing$ für $i \neq j$ so, dass $M \setminus \bigcup_{j=1}^r V_j \subset M$

eine Nullmenge ist. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ ist integrierbar über M genau dann, wenn $f \circ g_j \sqrt{G_j} \in \mathcal{L}^1(\Omega_j)$ für $j = 1, \ldots, r$ ist. In diesem Falle ist

$$\int_M f\, dS = \sum_{j=1}^{r} \int_{\Omega_j} f \circ g_j \sqrt{G_j} d\lambda$$

(Für den Beweis benötigt man nicht, dass $M \setminus \bigcup_{j=1}^{r} V_j \subset M$ eine Nullmenge ist, sondern es genügt, dass es Karten $g_j : \Omega_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M$ $(j = r+1, \ldots, s)$ gibt so, dass $M = \bigcup_{j=1}^{s} V_j$ und $\lambda(g_j^{-1}(M \setminus \bigcup_{j=1}^{r} V_j)) = 0$ für $j = r+1, \ldots, s$ ist.)

Beispiele 9.10

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g : I \to \mathbb{R}^n$ eine C^1–Funktion mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ so, dass $g : I \to g(I)$ ein Homöomorphismus ist. Dann ist $M = g(I) \subset \mathbb{R}^n$ eine 1–dimensionale C^1–Untermannigfaltigkeit mit Karte g und

$$G(x) = \det(J_g(x)^t\, J_g(x)) = \|g'(x)\|^2 \quad (x \in I)$$

als zugehörigem Maßtensor. Ist $J \subset I$ ein kompaktes Intervall, so ist $K = g(J) \subset M$ kompakt und

$$\mathrm{Vol}_1(K) = \int_M \varkappa_K dS = \int_I \varkappa_K \circ g\sqrt{G} d\lambda = \int_J \|g'(x)\| dx$$

ist genau die Länge der stetig differenzierbaren Kurve $g|J$ im Sinne der Analysis II).

b) (Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$) Nach Beispiel 8.6 ist

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine 2–dimensionale C^∞–Untermannigfaltigkeit. Setze

$$\Omega =]0, \pi[\times]0, 2\pi[, \quad N = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$\rho_0 : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to \mathbb{R}^3 \setminus N, \quad \rho_0(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$$

C^∞–invertierbar mit $\rho_0(\{1\} \times \Omega) = S^2 \cap N^c (=: V)$. Also ist

$$g : \rho_0(1, \cdot) : \Omega \to V \subset S^2$$

eine Karte von S^2. Analog folgt, dass $h :]0, \pi[\times] - \pi, +\pi[\to S^2 \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \times \{0\})^c$,

$$h(\vartheta, \varphi) = (\sin\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta, \sin\vartheta \sin\varphi)$$

eine Karte von M ist. Wegen

$$S^2 \setminus V = S^2 \cap N = \{(\cos\varphi, 0, \sin\varphi);\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\} = h\Big(\{\frac{\pi}{2}\} \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]\Big)$$

ist $\mathrm{Vol}_2(S^2 \cap N) = 0$.

Der Maßtensor von g ist $G(\vartheta, \varphi) = \sin^2\vartheta$ (Nachrechnen!). Nach Lemma 9.9 ist eine Funktion $f : S^2 \to \mathbb{C}$ integrierbar genau dann, wenn $f \circ g\sqrt{G} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ist. In diesem Fall gilt:

$$\int\limits_{S^2} f dS = \int\limits_{\Omega} f(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\lambda(\vartheta, \varphi).$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{Vol}_2(S^2) = \int\limits_{S^2} 1 dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta) d\varphi = 4\pi.$$

c) (Rotationsflächen) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $r : I \to \mathbb{R}_+^*$ stetig differenzierbar. Die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z \in I \text{ und } x^2 + y^2 = r(z)^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

ist als Nullstellenmenge der C^1–Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}, \quad h(x, y, z) = x^2 + y^2 - r(z)^2$$

mit $\mathrm{grad}\, h(x, y, z) = (2x, 2y, -2r(z)r'(z)) \neq 0$ für $(x, y, z) \in M$ eine C^1–Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ (Satz 8.5). Setze

$$\Omega = I \times]0, 2\pi[, \quad V = M \cap (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})^c.$$

Dann ist $g : \Omega \to V$, $g(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, t)$ eine Karte von M. Vermöge der Karte

$$\tilde{g} : I \times] - \pi, +\pi[\to \mathbb{R}^3, \quad \tilde{g}(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, t)$$

entspricht $M \setminus V$ der Nullmenge $I \times \{0\}$. Der Maßtensor von g ist

$$G(t, \varphi) = r^2(t)\ (1 + r'(t)^2).$$

Nach Lemma 9.9 ist $f : M \to \mathbb{C}$ integrierbar genau dann, wenn $f \circ g\sqrt{G} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ist. In diesem Fall ist

$$\int\limits_M f dS = \int\limits_\Omega f \circ g\sqrt{G} d\lambda.$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{Vol}_2(M) = \int_M 1 dS = \int_{I\times]0,2\pi[} r(t)\sqrt{1+r'(t)^2} d\lambda(t,\varphi) = 2\pi \int_I r(t)\sqrt{1+r'(t)^2} d\lambda(t),$$

falls der Integrand ganz rechts über I integrierbar ist. Um die letzte Identität zu begründen, benutze man den Satz von Fubini und den Satz von der monotonen Konvergenz.

d) (Graphen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und sei $\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ $(k \geq 1)$. Dann ist

$$M = G(\varphi) = \{(x, \varphi(x));\ x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine C^k–Hyperfläche (Satz 8.2 (ii)), die überdeckt wird durch die Karte

$$g : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad g(x) = (x, \varphi(x))$$

mit Jacobi–Matrix $J_g(x) = \binom{E_{n-1}}{\mathrm{grad}\ \varphi(x)}$. Nach Korollar 8.12 ist ihr Maßtensor

$$G(x) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{n-1}\leq n} \left(\det\left(\frac{\partial g_{i_\mu}}{\partial x_\nu}(x)\right)_{1\leq\mu,\nu\leq n-1}\right)^2 = 1 + \|\mathrm{grad}\ \varphi(x)\|^2.$$

Sei $A = J_g(x)$ und A_i $(1 \leq i \leq n-1)$ die $(n-1)\times(n-1)$–Matrix, die aus A durch Streichen der i–ten Zeile hervorgeht. Durch Entwickeln nach der i–ten Spalte erhält man

$$\det A_i = (-1)^{n-1+i}\partial_i\varphi(x).$$

Also ist eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ integrierbar über M genau dann, wenn $f \circ g\sqrt{G}$ zu $\mathcal{L}^1(\Omega)$ gehört. In diesem Fall ist

$$\int_M f dS = \int_\Omega f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\varphi(x)\|^2} d\lambda.$$

e) (Obere Halbsphäre) Die obere Halbsphäre vom Radius $r > 0$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = r \text{ und } x_n > 0\}$$

ist Graph der C^∞–Funktion $\varphi : \Omega = \{t \in \mathbb{R}^{n-1};\ \|t\| < r\} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = (r^2 - t_1^2 - \ldots - t_{n-1}^2)^{1/2}.$$

Wegen $\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t) = -t_j/\varphi(t)$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ ist nach Teil d) der zugehörige Maßtensor

$$G(t) = 1 + \|\mathrm{grad}\ \varphi(t)\|^2 = 1 + (\|t\|^2/\varphi(t)^2) = r^2/\varphi(t)^2.$$

Also ist eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ integrierbar über M genau dann, wenn die Funktion

$$\Omega \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t, \varphi(t)) \frac{r}{\varphi(t)}$$

in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ liegt. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_M f dS &= \int\limits_{\|t\|<r} f(t, (r^2 - \|t\|^2)^{1/2}) r (r^2 - \|t\|^2)^{-1/2} d\lambda(t) \\
&= \int\limits_{\|t\|<1} f(rt, r(1 - \|t\|^2)^{1/2}) r^{n-1} (1 - \|t\|^2)^{-1/2} d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Substitution $t \mapsto rt$ benutzt.

Satz 9.11 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p–dimensionale C^k–Untermannigfaltigkeit ($p \geq 1$), und sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^k–invertierbar. Dann gilt:

a) $\tilde{M} = \Phi(M) \subset \mathbb{R}^n$ ist eine p–dimensionale C^k–Untermannigfaltigkeit.

b) Ist $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d.h. linear mit $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist eine Funktion $f : \tilde{M} \to \mathbb{C}$ integrierbar über $\tilde{M}$ genau dann, wenn die Funktion $f \circ \Phi$ integrierbar über M ist. In diesem Fall gilt:

$$\int\limits_{\tilde{M}} f dS = \int\limits_M f \circ \Phi dS.$$

Bemerkung 9.12 Ist $\Phi(x) = a + rx$ ($a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), so bleibt die quivalenz in 9.11 b) richtig, und es gilt

$$\int\limits_{\tilde{M}} f dS = |r|^p \int\limits_M f \circ \Phi dS.$$

§10 Kompakta mit glattem Rand

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p–dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k mit $1 \leq k \leq \infty$ und $1 \leq p \leq n-1$.

Definition 10.1 Sei $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in a, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset M$ und $\psi(0) = a$, $\psi'(0) = v$. Unter dem Tangentialraum von M in a verstehen wir die Menge

$$T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n;\ v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}.$$

Satz 10.2 Für $a \in M$ gilt:

a) $T_a M \subset \mathbb{R}^n$ ist ein p–dimensionaler Untervektorraum.

b) Ist $g : \Omega \overset{\sim}{\longrightarrow} V \subset M$ eine Karte von M und ist $c \in \Omega$ mit $g(c) = a$, so ist

$$T_a M = g'(c)\mathbb{R}^p.$$

c) Ist U eine offene Umgebung von a und ist $h = (h_1, \ldots, h_{n-p}) \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-p})$ mit

$$M \cap U = \{x \in U;\ h(x) = 0\} \text{ und } \operatorname{rg} h'(a) = n - p,$$

so gilt

$$T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n;\ v \perp \text{grad } h_j(a) \text{ für } j = 1, \ldots, n-p\} = \text{Ker } h'(a).$$

Bemerkung: $T_a M$ ist unabhängig davon, ob man M als C^k– oder als C^1–Mannigfaltigkeit auffasst.

Definition 10.3 Sei $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Normalenvektor von M in a, falls $v \perp T_a M$, das heißt, falls $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_a M$. Die Menge aller Normalenvektoren von M in a bezeichnen wir mit $N_a M$.

Korollar 10.4 Für $a \in M$ ist $N_a M \subset \mathbb{R}^n$ ein $(n-p)$–dimensionaler Teilvektorraum. Ist $h \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-p})$ wie in Teil c) von Satz 10.2, so bilden die Vektoren grad $h_i(a)$ $(1 \leq i \leq n-p)$ eine Basis von $N_a M$.

Als nächstes betrachten wir kompakte Teilmengen in $\mathbb{R}^n$, deren topologischer Rand in natürlicher Weise eine C^1–Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ bildet.

Definition 10.5 (Kompakta mit glattem Rand)
Sei $\phi \neq A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir sagen, dass A glatten Rand besitzt, falls für alle $a \in \partial A$ eine offene Umgebung U von a existiert und eine C^1–Funktion $\psi \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit

(i) $A \cap U = \{x \in U;\ \psi(x) \leq 0\}$,

(ii) grad $\psi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Lemma 10.6 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Sei $a \in \partial A$ und $\psi \in C^1(U, \mathbb{R})$ wie in Definition 10.5. Dann gilt

$$\partial A \cap U = \{x \in U;\ \psi(x) = 0\}.$$

Insbesondere ist

$$\operatorname{Int}(A) \cap U = \{x \in U;\ \psi(x) < 0\} \text{ und } a \in \overline{\operatorname{Int}(A)}.$$

Korollar 10.7 Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so ist $\partial A \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1.

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so gibt es ein eindeutiges stetiges Vektorfeld $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ aus Normalenvektoren $\nu(a)$ von ∂A in a, das "nach außen" zeigt und aus Einheitsvektoren besteht.

Satz 10.8 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand.

a) Für jeden Punkt $a \in \partial A$ exstiert genau ein Vektor $\nu(a) \in \mathbb{R}^n$ mit

   (i) $\nu(a) \perp T_a(\partial A)$,

   (ii) $\|\nu(a)\| = 1$,

   (iii) es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $a + t\nu(a) \notin A$ für alle $t \in]0, \varepsilon[$.

b) Die Funktion $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$, $a \mapsto \nu(a)$ ist stetig.

Definition 10.9 Für ein Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand und $a \in \partial A$ heißt der in Satz 10.8 beschriebene Vektor $\nu(a) \in N_a(\partial A)$ der äußere Normalen–Einheitsvektor von A in a. Die Funktion $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ heißt das äußere Einheits–Normalenfeld von A.

Bemerkung 10.10 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von einem Punkt $a \in \partial A$ und ist $\rho \in C^1(U, \mathbb{R})$ eine Funktion mit

$$\partial A \cap U = \{x \in U;\ \rho(x) = 0\} \text{ und } \operatorname{grad} \rho(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \partial A \cap U,$$

so gilt

a) $\operatorname{grad} \rho(x)/\|\operatorname{grad} \rho(x)\| = \pm\nu(x)$ für alle $x \in \partial A \cap U$,

b) $\rho\Big(a + t(\operatorname{grad} \rho(a)/\|\operatorname{grad} \rho(a)\|)\Big) > 0$ für genügend kleine $t > 0$.

§11 C^∞–Zerlegungen der Eins

Wir wollen zeigen, dass es zu jeder offenen Umgebung U einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Funktion $\theta \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ gibt mit $0 \le \theta \le 1$ und $\theta|K \equiv 1$ so, dass θ außerhalb einer kompakten Teilmenge von U verschwindet.

Lemma 11.1 Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ wird durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/(x-a)(b-x)) & ; \quad a < x < b \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

eine C^∞–Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert.

Hiermit beweist man einen Spezialfall des gesuchten Ergebnisses.

Lemma 11.2 Zu jeder reellen Zahl $\delta > 0$ gibt es eine Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1$ auf $\overline{B}_\delta(0)$ und $\psi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(0)$.

Definition 11.3 Sei $E = \mathbb{C}^r (r \in \mathbb{N}^*)$. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to E$ heißt

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von f. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen definieren wir

$$C_c^k(U,E) = \{f \in C^k(\mathbb{R}^n, E);\ \text{supp}(f) \subset U \text{ ist kompakt}\}.$$

Für $E = \mathbb{C}$ sei $C_c^k(U) = C_c^k(U,\mathbb{C})$.

Das folgende Lemma dient zur Vorbereitung unserer eigentlichen Resultate über C^∞–Abschneidefunktionen und C^∞–Zerlegungen der Eins.

Lemma 11.4 Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U_i \subset \mathbb{R}^n$ $(0 = 1, \ldots, r)$ offen mit

$$K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_r.$$

Dann gibt es Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

(i) $f_i \ge 0$,

(ii) $\text{supp}(f_i) \subset U_i$,

(iii) $\sum\limits_{i=1}^r f_i \ge 1$ auf K.

Lemma 11.5 Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \supset K$ eine offene Umgebung von K. Dann gibt es eine Funktion $f \in C_c^\infty(U)$ mit $0 \le f \le 1$ und $f|K \equiv 1$.

Mit den beiden vorhergehenden Lemmata können wir unser endgültiges Resultat über C^∞–Zerlegungen der Eins beweisen.

Satz 11.6 (C^∞–Zerlegungen der Eins) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei

$$K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_r$$

eine offene berdeckung von K. Dann existieren C^∞–Funktionen $\theta_1, \ldots, \theta_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

(i) $0 \leq \theta_i \leq 1$,

(ii) $\operatorname{supp}(\theta_i) \subset U_i$,

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{r} \theta_i \equiv 1$ auf K.

Wir nennen in diesem Fall die Folge $(\theta_i)_{i=1}^r$ eine <u>C^∞–Zerlegung der Eins</u> bezüglich der gegebenen offenen berdeckung $(U_i)_{i=1}^r$ des Kompaktums K.

§12 Der Gaußsche Integralsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f \in C^1[a, b]$. Der Fundamentalsatz der Differential– und Integralrechnung besagt, dass

$$\int\limits_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Unser Ziel im folgenden ist es, einen entsprechenden Satz für Funktionen von mehreren Veränderlichen herzuleiten.

Lemma 12.1 Für $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Dieses Eregebnis kann man direkt auf den Fundamentalsatz der Differential– und Integralrechnung zurückführen, indem man $\partial\varphi/\partial x_i$ über einen genügend großen kompakten Quader integriert und das Integral als iteriertes Riemann–Integral auswertet (Satz 5.12).

Lemma 12.2 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I =]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi \in C^1(\Omega)$ eine Funktion mit $\varphi(\Omega) \subset I$. Setze

$$A = \{(x', x_n) \in \Omega \times I;\ x_n \leq \varphi(x')\}.$$

Dann ist (Beispiel 9.10 d))

$$M = G(\varphi) = \{(x', x_n) \in \Omega \times I;\ x_n = \varphi(x')\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine C^1–Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ und für alle $f \in C_c^1(\Omega \times I)$ gilt

$$\int\limits_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, d\lambda(x) = \int\limits_M f(x)\nu_i(x)\, dS \quad (1 \leq i \leq n),$$

wobei $\nu_n(x) = (1 + \|\text{grad } \varphi(x')\|^2)^{-\frac{1}{2}}$ sei und für $1 \leq i < n$

$$\nu_i(x) = -(1 + \|\text{grad } \varphi(x')\|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x').$$

Im Beweis des Gaußschen Satzes benötigen wir eine einfache Beobachtung über das Verhalten der Divergenz eines Vektorfeldes bei Komposition mit einem Endomorphismus des zugrunde liegenden Raumes.

Lemma 12.3 Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein C^1–Vektorfeld über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Ist $\Phi \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, so gilt auf der Menge $\Phi^{-1}(U)$ die Identität

$$\text{div}(F \circ \Phi) = [\text{div}(\Phi \circ F)] \circ \Phi.$$

Der Beweis folgt direkt aus der Kettenregel, wenn man benutzt, dass $\text{div}(F \circ \Phi) = \text{Spur}(J_{F\circ\Phi})$ ist.

Satz 12.4 (Gaußscher Integralsatz) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits–Normalenfeld von A (Definition 10.9). Für jede C^1–Funktion $F \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ auf einer offenen Umgebung W von A gilt

$$\int\limits_A \text{div } F\, d\lambda = \int\limits_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x).$$

Beispiel 12.5 Für das C^1–Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = x$ ist $\text{div } F(x) = n$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so folgt aus dem Gaußschen Satz

$$n\lambda(A) = \int\limits_A \text{div } F\, d\lambda = \int\limits_{\partial A} \langle x, \nu(x)\rangle dS(x).$$

Im Spezialfall $A = K_n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$ ist $\partial A = S^{n-1}$, und

$$\nu : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n, \quad \nu(x) = x$$

ist das äußere Einheits–Normalenfeld von A. In diesem Fall liefert der Gaußsche Satz die Beziehung

$$n\,\lambda(K_n) = \mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}).$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und äußerem Einheits–Normalenfeld $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$. Ist $W \supset A$ offen und $f \in C^1(W,\mathbb{R})$, so nennt man die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) := \frac{d}{dt} f(x + t\nu(x))|_{t=0} = \langle \mathrm{grad}\ f(x),\ \nu(x)\rangle$$

die Ableitung von f in Normalenrichtung in $x \in \partial A$. Für $f \in C^2(W,\mathbb{R})$ sei wie üblich

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\Big)(x) \quad (x \in W).$$

Satz 12.6 (Greensche Formel) Für W und A wie oben und $f, g \in C^2(W,\mathbb{R})$ gilt

$$\int_A (f\Delta g - g\Delta f) d\lambda = \int_{\partial A} \Big(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big) dS.$$

Eine interessante Anwendung auf harmonische Funktionen erhält man mit Hilfe des folgenden Ergebnisses, das ebenfalls mit dem Gaußschen Satz bewiesen werden kann.

Lemma 12.7 Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und ist $W \supset A$ eine offene Umgebung, so gilt für $f \in C^1(W,\mathbb{R})$ und $g \in C^2(W,\mathbb{R})$

$$\int_A (f\Delta g + \langle \mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ g\rangle) d\lambda = \int_{\partial A} f\frac{\partial g}{\partial \nu} dS.$$

Insbesondere folgt für $f \in C^2(W,\mathbb{R})$

$$\int_A (f\Delta f + \|\mathrm{grad}\ f\|^2) d\lambda = \int_{\partial A} f\frac{\partial f}{\partial \nu} dS.$$

Als Folgerung erhält man, dass harmonische Funktionen auf Kompakta mit glattem Rand bereits durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt sind.

Korollar 12.8 Sei W offene Umgebung eines Kompaktums mit glattem Rand $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f \in C^2(W,\mathbb{R})$ harmonisch auf dem Innern von A (d.h. $\Delta f|\mathrm{Int}(A) \equiv 0$). Ist $f|\partial A \equiv 0$, so folgt $f|A \equiv 0$.

§13 Differentialformen

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Für $p \geq 1$ sei

$$V^p = V \times \ldots \times V \quad (p - \text{mal}).$$

Definition 13.1 Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und sei $p \in \mathbb{N}^*$. Eine alternierende p–Form mit Werten in K ist eine Abbildung $\omega : V^p \to K$ mit:

(i) ω ist $\mathbb{R}$–multilinear.

(ii) Ist $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ und gibt es $i \neq j$ mit $v_i = v_j$, so ist $\omega(v_1, \ldots, v_p) = 0$.

Wir definieren

$$\Lambda^p_K V^* := \{\omega;\ \omega : V^p \to K \text{ ist eine alternierende } p\text{–Form}\}$$

und $\Lambda^0_K V^* = K$. Statt $\Lambda^p_{\mathbb{R}} V^*$ schreiben wir $\Lambda^p V^*$.

Die Räume $\Lambda^p_K V^*$ sind bezüglich punktweiser Addition und skalarer Multiplikation K–Vektorräume.

Bemerkung 13.2 Für eine $\mathbb{R}$–multilineare Abbildung $\omega : V^p \to K$ $(p \geq 2)$ ist Bedingung (ii) aus Definition 13.1 äquivalent zu der Bedingung:

(ii)* Vertauscht man zwei Argumente (bei sonst gleichen Variablen), so ist

$$\omega(\ldots, v', \ldots, v'', \ldots) = -\omega(\ldots, v'', \ldots, v', \ldots).$$

Da man jede Permutation als endliches Produkt von Transpositionen schreiben kann, folgt:

Lemma 13.3 Sei $\omega \in \Lambda^p_K V^*$ und sei $\pi \in \mathcal{S}_p$ eine Permutation. Dann gilt

$$\omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) = \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(v_1, \ldots, v_p) \quad (v_1, \ldots, v_p \in V).$$

Definition 13.4 Für $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \Lambda^1_K V^*$ ($= V^*$, falls $K = \mathbb{R}$) sei $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p \in \Lambda^1_K V^*$ definiert durch

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p(v_1, \ldots, v_p) = \det\Big((\varphi_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq p}\Big).$$

Da $\det : M(p \times p, K) \to K$ K–multilinear und alternierend von den Spalten abhängt ($\mathbb{R}$–multilinear genügt hier), ist $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p \in \Lambda^1_K V^*$ wohldefiniert.

Bemerkung 13.5 Die Abbildung

$$(\Lambda^1_K V^*)^p \to \Lambda^p_K V^*, \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \mapsto \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$$

ist K–multilinear und alternierend. (Beachte, dass $\det : M(p \times p, K) \to K$ K–multilinear und alternierend von den Zeilen abhängt).

Satz 13.6

a) Sei $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}$–Vektorraumes V^*. Für $p \in \mathbb{N}^*$ bilden die Formen

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$$

eine Basis des K–Vektorraumes $\Lambda^p_K V^*$. Insbesondere ist

$$\dim_K(\Lambda^p_K V^*) = \binom{n}{p}, \quad \Lambda^p_K V^* = \{0\} \text{ für } p > n.$$

b) Ist $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ eine Basis des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\Lambda^1_{\mathbb{C}} V^*$, so bilden für $1 \leq p \leq n$ die Elemente

$$\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge \psi_{i_p} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$$

eine Basis des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\Lambda^p_{\mathbb{C}} V^*$.

Zum Beweis von Teil b) beachte man, dass nach Teil a) und nach Bemerkung 13.5 die angegebenen Formen den $\mathbb{C}$–Vektorraum $\Lambda^p_{\mathbb{C}} V^*$ aufspannen. Aus Dimensionsgründen müssen sie linear unabhängig sein.

Satz 13.7 Für $p, q \geq 1$ gibt es genau eine Abbildung

$$\wedge : \Lambda^p_K V^* \times \Lambda^q_K V^* \to \Lambda^{p+q}_K V^*, \quad (\omega, \sigma) \mapsto \omega \wedge \sigma$$

(für $p + q > n$ die Nullabbildung) mit den Eigenschaften:

(i) $\wedge$ ist K–bilinear;

(ii) für $\psi_1, \dots, \psi_p, \eta_1, \dots, \eta_q \in \Lambda^1_K V^*$ ist

$$(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_p) \wedge (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_q) = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_p \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_q,$$

wobei die Terme in Klammern und die rechte Seite gemäß 13.4 definiert seien.

<u>Konvention</u>: Für $a \in K$ und $\omega \in \Lambda^p_K V^*$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ setzt man

$$a \wedge \omega := \omega \wedge a := a\omega.$$

Man nennt die in Satz 13.7 definierte Verknüpfung das äußere Produkt zwischen den Formen vom Grade p und den Formen vom Grade q.

Lemma 13.8 Für $\omega_1 \in \Lambda^p_K V^*$, $\omega_2 \in \Lambda^q_K V^*$ und $\omega_3 \in \Lambda^r_K V^*$ gilt:

a) $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_4 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$;

b) $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1$.

Sei im folgenden $E := \mathbb{R}^n$.

Definition 13.9 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in \mathbb{N}$.

a) Eine (K–wertige) Differentialform vom Grade p (oder p–Form) über U ist eine Abbildung $\omega : U \to \Lambda^p_K E^*$ (0–Formen über U sind einfach Funktionen $U \to K$).

b) Wir schreiben dx_i ($i = 1, \ldots, n$) für die Koordinatenprojektionen

$$dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_i$$

c) Für $f \in C^1(U, K)$ definiert man eine 1–Form über U durch

$$df(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \quad (\in \Lambda^1_K E^*).$$

Zu jeder p–Form ω über U gibt es eindeutige Funktionen

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} : U \to K \quad (1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n)$$

mit

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \quad (x \in U).$$

Abkürzend schreiben wir hierfür

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Definition 13.10

a) Eine p–Form $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ über U heißt stetig (bzw. C^r für $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) oder p–Form der Klasse C^r, falls alle $\omega_{i_1 \ldots i_p} : U \to K$ von diesem Typ sind.

b) Sind $\omega, \tilde{\omega}$ p–Formen über U und ist σ eine q–Form über U, so definiert man eine p–Form $\omega + \tilde{\omega}$ auf U durch

$$(\omega + \tilde{\omega})(x) = \omega(x) + \tilde{\omega}(x)$$

und eine $(p+q)$–Form $\omega \wedge \sigma$ über U durch

$$(\omega \wedge \sigma)(x) = \omega(x) \wedge \sigma(x).$$

c) Ist $\omega = \sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \omega_{i_1\ldots i_p}\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$ von der Klasse C^1, so heißt die $(p+1)$–Form

$$d\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} (d\omega_{i_1\ldots i_p})\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$$

die <u>äußere Ableitung</u> oder <u>das äußere Differential</u> von ω.

Bemerkung 13.11 Für ω und $\tilde\omega$ wie in 13.10 b) gilt

$$(\omega+\tilde\omega)_{i_1\ldots i_p} = \omega_{i_1\ldots i_p} + \tilde\omega_{i_1\ldots i_p} \quad (1\le i_1<\ldots<i_p\le n).$$

Ist ω wie in Teil c) von Definition 13.10, so gilt

$$d\omega(x) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_{p+1}\le n} \sum_{\rho=1}^{p+1} (-1)^{\rho-1} \frac{\partial\omega_{i_1\ldots\hat{i_\rho}\ldots i_{p+1}}}{\partial x_{i_\rho}}(x)\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{p+1}}.$$

Hierbei bedeutet das Symbol $\hat{i}_\rho$, dass der Index i_ρ weggelassen werden soll.

<u>Schreibweise</u>: Anstatt $\omega = \sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \omega_{i_1\ldots i_p} dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$ schreibt man

$$\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I.$$

Hierbei durchläuft I alle Multiindizes $1\le i_1<\ldots<i_p\le n$ und

$$dx_I = dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}.$$

Wir definieren $\Lambda^p(dx, C^r(U,K)) = \{\omega;\ \omega\ K\text{–wertige } p\text{–Form über } U \text{ der Klasse } C^r\}$.

Satz 13.12 Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und seien $p,q\in\mathbb{N}$.

a) Für $\omega_1,\omega_2\in\Lambda^p(dx, C^1(U,K))$ und $\lambda_1,\lambda_2\in K$ gilt

$$d(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2) = \lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2.$$

b) Für $\omega\in\Lambda^p(dx,\ C^1(U,K))$ und $\sigma\in\Lambda^q(dx,\ C^1(U,K))$ gilt

$$d(\omega\wedge\sigma) = (d\omega)\wedge\sigma + (-1)^p\omega\wedge(d\sigma).$$

c) Für $\omega\in\Lambda^p(dx, C^2(U,K))$ ist $d(d\omega)=0$.

Bemerkung 13.13 Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen.

a) Eine C^1–Form ω über U heißt geschlossen, falls $d\omega = 0$.

b) Eine C^1–Form ω über U vom Grade $p \geq 1$ heißt exakt, falls es eine $(p-1)$–Form η der Klasse C^1 über U gibt mit $\omega = d\eta$.

Ist η in Teil b) von Bemerkung 13.13 sogar von der Klasse C^2, so ist $\omega = d\eta$ nach Satz 13.12 c) gechlossen. ber hinreichend schönen offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ ist jede geschlossene C^1–Form vom Grade $p \geq 1$ auch exakt. Wir kommen auf diese Frage zurück in §14.

Definition 13.14 Seien $V \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(V) \subset U$. Ist

$$\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I dx_I$$

eine K–wertige p–Form über U $(p \geq 1)$, so ist

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{|I|=p} \omega_I \circ \varphi \, d\varphi_I \quad \text{mit} \quad d\varphi_I := d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}$$

eine K–wertige p–Form über V. Für $p = 0$ sei $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ für beliebige Funktionen $f : U \to K$.

Satz 13.15 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und $W \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen und seien $\varphi : V \to U$, $\psi : W \to V$ C^1–Abbildungen. Sind $\omega_1, \omega_2, \omega$ K–wertige p–Formen über U und ist σ eine K–wertige q–Form über U, so gilt:

a) $\varphi^*(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1\varphi^*(\omega_1) + \lambda_2\varphi^*(\omega_2)$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

b) $\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\sigma)$.

c) Ist $\omega \in \Lambda^p(dx, C^1(U, K))$ und $\varphi \in C^2(V, \mathbb{R}^n)$, so ist $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega))$.

d) $\psi^*(\varphi^*(\omega)) = (\varphi \circ \psi)^*(\omega)$.

§14 Poincarésches Lemma

ber jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist jede exakte C^∞–Form geschlossen. Im folgenden interessiert uns die Frage, welche geschlossenen Formen exakt sind.

Lemma 14.1 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offene Mengen mit $[0,1] \times U \subset V$. Seien

$$\psi_i : U \to V, \quad \psi_i(x) = (i, x) \quad (i = 0, 1)$$

und sei $\sigma \in \Lambda^p(dx, C^1(V,K))$ $(p \geq 1)$ geschlossen. Dann gibt es eine Form $\eta \in \Lambda^{p-1}(dx, C^1(U,K))$ mit

$$\psi_1^*(\sigma) - \psi_0^*(\sigma) = d\eta.$$

Bemerkung 14.2 Ist in der Situation von Lemma 14.1 die Form σ von der Klasse C^k $(k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$, so kann man auch η von der Klasse C^k wählen.

Satz 14.3 (Poincarésches Lemma) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig (d.h. gibt es ein $x_0 \in U$ so, dass $x_0 + t(x - x_0) \in U$ für alle $x \in U$ und $t \in [0,1]$), so ist jede geschlossene Form $\omega \in \Lambda^p(dx, C^1(U,K))$ $(p \geq 1)$ exakt.

Bemerkung 14.4 Ist in der Situation von Satz 14.3 die Form ω von der Klasse C^k $(k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$, so ist $\omega = d\eta$ mit einer Form $\eta \in \Lambda^{p-1}(dx, C^p(U,K))$.

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in \mathbb{N}$ sei

$$\Omega^p(U) := \{\omega;\ \omega \text{ ist eine } K\text{–wertige } p\text{–Form der Klasse } C^\infty \text{ über } U\},$$

wobei wahlweise $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ sei.

Korollar 14.5 Für sternförmige offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$0 \to K \overset{i}{\hookrightarrow} \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \to 0,$$

wobei $i : K \to \Omega^0(U) = C^\infty(U,K)$, $i(t) \equiv t$ ist, eine exakte Sequenz von K–Vektorräumen, d.h. alle Abbildungen sind K–linear und

$$i(K) = \operatorname{Ker}(\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U)),$$

$$\operatorname{Im}(\Omega^{p-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^p(U)) = \operatorname{Ker}(\Omega^p(U) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(U)) \quad (1 \leq p \leq n).$$

Hierbei sei $\Omega^{n+1}(U) = \{0\}$.

Für eine beliebige offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ nennt man den Quotientenvektorraum

$$H^p_{DR}(U) := \frac{\operatorname{Ker}(\Omega^p(U) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(U))}{\operatorname{Im}(\Omega^{p-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^p(U))} \quad (p \geq 1)$$

die p–te de Rhamsche Kohomologiegruppe von U. Für sternförmiges U ist also

$$H^p_{DR}(U) = 0 \text{ für } p \geq 1.$$

Korollar 14.6 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine sternförmige offene Menge und sei $v : U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(i) es gibt ein $u \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $v = \text{grad } u$ ($\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i dx_i$ ist exakt);

(ii) die 1–Form $\sum_{i=1}^{n} v_i dx_i \in \Lambda^1(dx, C^1(U, \mathbb{R}))$ ist geschlossen;

(iii) $\partial_i v_j = \partial_j v_i$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

Also hat ein C^1–Vektorfeld $v = (v_1, \ldots, v_n)$ über einer offenen sternförmigen Menge U in $\mathbb{R}^n$ ein Potential genau dann, wenn es die offensichtlich notwendigen Bedingungen $\partial_i v_j = \partial_j v_i$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ erfüllt.

Literatur

Cohn, D.L.: Measure theory. Birkhäuser 1980.

Elstrodt, J.: Maß– und Integrationstheorie. Springer 1996.

Fleming, W.: Functions of several variables. Springer 1977.

Forster, O.: Analysis III. Vieweg 1981.

König, H.: Measure and Integration: An advanced course in basic procedures and applications. Springer 1997.

Lang, S.: Real analysis. Adisson–Wesley 1969.

Rudin, W.: Principles of mathematical analysis. McGraw–Hill 1976.

Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw–Hill 1974.

Spivak, M.: Calculus. Benjamin 1967.

Spivak, M.: Calculus on manifolds. Benjamin 1965.

Warner, F.W.: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott Foresman 1971.