

Hilfsmittel aus der Analysis II

1. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, d.h. ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) zusammen mit einer Abbildung (Norm): $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ (\alpha \in \mathbb{R})$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2. $(E, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in E konvergiert. Für $a \in E$, $r > 0$ seien

$$B_r(a) = \{x \in E; \|x - a\| < r\}, \quad \overline{B}_r(a) = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\}.$$

Seien $U, A, K \subset E$. Man nennt

- U offen, falls $\forall a \in U \exists r > 0$ mit $B_r(a) \subset U$
- A abgeschlossen, falls $A^c = E \setminus A \subset E$ offen ist
- K kompakt, falls $\forall (U_i)_{i \in I}$ Familie offener Mengen in E mit $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ endlich viele $i_1, \dots, i_r \in I$ existieren auf $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$
- U Umgebung von $a \in E$, falls $V \subset E$ offen existiert mit $a \in V \subset U$.

3. Auf dem $\mathbb{R}^n$ benutzen wir die euklidische Norm $\|(x_i)_{i=1}^n\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$. Auf dem Raum der $(m \times n)$ -Matrizen $M(m \times n, \mathbb{R})$ wird durch

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| \leq 1\} \quad (A \in M(m \times n, \mathbb{R}))$$

eine Norm definiert, für die gilt

- $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|(a_{ij})\| \leq \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|$
- $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ für $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

Insbesondere ist

- Konvergenz in $M(m \times n, \mathbb{R}) =$ koeffizientenweise Konvergenz
- $f = (f_{ij}) : D \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$ stetig $\Leftrightarrow f_{ij}$ stetig $\forall i, j$.

4. Für eine stetige Funktion $f = (f_{ij}) : [a, b] \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$ sei

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_{ij}(t) dt \right)_{i,j} \in M(m \times n, \mathbb{R}).$$

Wir benötigen:

5. $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\iff$ (Heine-Borel) $K \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen und beschränkt
 $\iff$ Jede Folge (x_k) in K hat eine konvergente Teilfolge mit Limes in K .
 Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig und $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ ist kompakt.
6. Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei

$$C^k(U, \mathbb{R}^m) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m; f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}.$$

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. Für $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U \quad \forall t \in [0, 1]$ gilt (Mittelwertsatz)

$$f(x + \xi) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x + t\xi) dt \right) \cdot \xi \quad (\text{Matrix mal Spaltenvektor})$$

und (Mittelwertabschätzung)

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} \|J_f(x + t\xi)\| \right) \|\xi\|.$$

7. Banachscher Fixpunktsatz:

Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, $\rho \in (0, 1)$.
 Ist $T : A \rightarrow A$ eine ρ -Kontraktion, d.h. eine Abbildung mit

$$\|Tx - Ty\| \leq \rho \|x - y\| \quad \forall x, y \in A.$$

So existiert genau ein $a \in A$ mit $Ta = a$.