Hilfsmittel aus der Analysis II (Fortsetzung)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, d.h. eine Menge X zusammen mit einer Abbildung (Metrik) $d : X \times X \to \mathbb{R}$ so, dass $\forall x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Beispiel: $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum $\Rightarrow d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$ Metrik auf X.

8. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X heißt Cauchy (bzw. konvergent gegen $x \in X$), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; k_0 \in \mathbb{N} \;\text{ mit }\; d(x_k, x_\ell) < \varepsilon \; \forall k, \ell \geq k_0 \quad (\text{bzw. } d(x_k, x) < \varepsilon \; \forall k \geq k_0).$$

(X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

9. Die offene bzw. abgeschlossene Kugel um $a \in X$ mit Radius $r > 0$ sei definiert durch

$$B_r(a) = \{x \in X;\; d(x, a) < r\}, \quad \overline{B}_r(a) = \{x \in X;\; d(x, a) \leq r\}.$$

Genau wie für normierte Räume (siehe (2)) definiert man die Begriffe "offene, abgeschlossene, kompakte Teilmenge von X" bzw. "Umgebung eines Punktes $a \in X$". Man zeigt, dass eine Menge $A \subset X$ abgeschlossen ist genau dann, wenn sie zusammen mit jeder konvergenten Folge auch ihren Limes enthält.

10. Das System $\mathfrak{t} := \{U \subset X;\, U \text{ offen } \}$ hat die Eigenschaften:

(i) $\phi, X \in \mathfrak{t}$;

(ii) $U, V \in \mathfrak{t} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{t}$;

(iii) $U_i \in \mathfrak{t}$ ($i \in I$, I beliebige Indexmenge) $\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathfrak{t}$.

Einge Menge $\mathfrak{t} \subset \mathcal{P}(X)$ mit diesen Eigenschaften heißt Topologie auf X.

11. Jede Teilmenge $Y \subset X$ ((X, d) metrischer Raum) versehen wir mit der Relativmetrik $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$, $d_Y(x, y) = d(x, y)$. Man zeigt sehr einfach, dass eine Menge $V \subset Y$ genau dann offen in (Y, d_Y) ist, wenn eine offene Menge $U \subset X$ existiert mit $V = U \cap Y$. Ersetzt man hier "offen" durch "abgeschlossen", bleibt alles richtig.

12. Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig in $x \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ oder äquivalent, falls $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$ für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ gilt.

    Für $f : X \to Y$ sind äquivalent:

    (i) f ist stetig (d.h. stetig in jedem $x \in X$);

    (ii) $\forall \ V \subset Y$ offen ist $\overset{-1}{f}(V) \subset X$ offen;

    (iii) $\forall \ A \subset Y$ abgeschlossen ist $\overset{-1}{f}(A) \subset X$ abgeschlossen.

    Einschränkungen und Kompositionen stetiger Abbildungen bleiben stetig.

13. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $\phi \neq A \subset X$ ist die Abbildung

$$X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto d(x, A) := \inf\{d(x, a); \ a \in A\}$$

    stetig. Mit der Dreiecksungleichung kann man sogar zeigen, dass

$$|d(x, A) - d(y, A)| \ \leq \ d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

14. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $M \subset X$. Man nennt die Mengen

    $\overline{M} := \{x \in X; \ U \cap M \neq \phi \ \forall$ Umgebungen U von x $\}$,

    $\overset{\circ}{M} := \mathrm{Int}(M) := \{x \in X; \ \exists$ Umgebung U von x mit $U \subset M\}$,

    $\partial M := \{x \in X; \ \forall$ Umgebungen U von x gilt $U \cap M \ \neq \ \phi \ \neq \ U \cap M^c\}$.

    den Abschluss, das Innere bzw. den Rand von M. Es ist einfach zu zeigen, dass $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge, $\overset{\circ}{M}$ die größte offene Teilmenge von M ist und dass $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ abgeschlossen ist. Die Menge $\overline{M}$ besteht genau aus den Punkten $x \in X$, die Limes einer konvergenten Folge aus M sind.