UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 1 Abgabetermin: Montag, 31.10.2005

Aufgabe 1 (*Banachscher Fixpunktsatz*) **(1+2+1=4 Punkte)**

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $0 < \varrho < 1$ und $T : X \to X$ eine Abbildung mit

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq \varrho \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $x \in X$ beliebig, so erfüllt die rekursiv durch $x_0 = x$ und $x_{k+1} = T(x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Abschätzung

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \varrho^k \cdot d(x_1, x_0) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

(b) Für jede wie in (a) gebildete Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert der Limes $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ und es gilt

$$d(x, x_k) \leq \frac{\varrho^k}{1-\varrho} \cdot d(x_1, x_0) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

(c) Die Abbildung T besitzt genau einen Fixpunt, das heißt es gibt genau ein $x \in X$ mit $T(x) = x$.

Aufgabe 2 **(1+1+1=3 Punkte)**

Seien $A, B \subset R^n$. Es bezeichnet

$$A + B = \{a + b;\ a \in A, b \in B\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Sind A, B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.

(b) Ist A kompakt und B abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, so ist $A + B$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

(c) Sind A, B abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, so muss $A + B$ im allgemeinen nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ sein. (Sie können ein Gegenbeispiel schon für $n = 1$ finden.)

Eine Teilmenge $M \subset V$ eines Vektorraums V heißt konvex*, falls $tx+(1-t)y \in M$ für alle $x, y \in M$ und $t \in [0,1]$ gilt.*

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge und $f \in C^1(U)$, so dass alle partiellen Ableitungen von f beschränkt sind. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist, das heißt es gibt eine Konstante $L > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in U.$$

Aufgabe 4 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $y(0) = 0$ in jedem Intervall $[-\delta, \delta]$ $(\delta > 0)$ unendlich viele Lösungen hat.

(b) Zeigen Sie direkt (also ohne (a)), dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to R$; $f(t, y) = \sqrt[3]{y^2}$ in keiner Umgebung von $(0, 0)$ einer Lipschitz-Bedingung in y genügt.

Aufgabe 5* **(4* Punkte)**

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $X = C[a, b]$ der Raum der stetigen Funktionen $x : [a, b] \to \mathbb{R}$. Bekanntlich ist X mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \quad (x \in X)$$

ein Banachraum (=vollständiger normierter Raum). Weiter seien $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $M = \max_{t,s \in [a,b]} |k(t, s)|$ und $\mu \in \mathbb{R}$ ein Parameter mit $|\mu| M < \frac{1}{b-a}$.

Zeigen Sie, dass es genau eine stetige Funktion $x \in X$ mit

$$x(t) = \mu \int_a^b k(t, s)x(s)ds + u(t) \quad \textit{(Fredholmsche Integralgleichung)}$$

für alle $t \in [a, b]$ gibt.

Wenden Sie dazu den Banachschen Fixpunktsatz (siehe Aufgabe 1) an auf $\Phi : X \to X$ mit

$$\Phi(x)(t) = u(t) + \mu \int_a^b k(t, s)x(s)ds \quad (x \in X, t \in [a, b]).$$

Die Übungen können in Gruppen bis zu 3 Personen bearbeitet und **bis 9:15 Uhr im Briefkasten Nr.5 (nahe Zeichensaal)** abgegeben werden. Zur Klausurzulassung müssen insgesamt mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht werden.

Sollten Sie noch nicht für die Übungen angemeldet sein, so können Sie dies bei Dominik Faas (Zimmer 417, Email: *dominik@math.uni-sb.de*) nachholen.

Die Klausur findet am **Samstag, den 18.2.2006 (9 Uhr st)** statt.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre