UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 10 Abgabetermin: Montag, 16.1.2006

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Banachraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_X \|f_n\| d\mu \right) < \infty.$$

Zeigen Sie: Es gibt eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in X \setminus N$ absolut konvergiert. Die Funktion

$$F : X \to E,\ F(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) & , \text{ falls } x \in X \setminus N \\ 0 & , \text{ falls } x \in N \end{cases}$$

ist μ-integrabel und es gilt

$$\int_X F d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_X f_n d\mu \right).$$

Aufgabe 47 (4 Punkte)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$, $I = [a, b)$ ein halboffenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

$$f \in \mathcal{L}^1(\lambda|_I, \mathbb{R}) \ \Leftrightarrow \ \text{Das uneigentliche Riemann-Integral } \int_a^b |f(x)|dx \text{ existiert.}$$

In diesem Fall existiert auch das uneigentliche Riemann-Integral von f über $[a, b)$ und es gilt

$$\int_I f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Aufgabe 48 (1+2+2=5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist stetig.

(b) Das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ existiert.
(Hinweis: Integrieren Sie partiell und benutzen Sie das Cauchy-Kriterium für Folgen, um die Konvergenz von $\int_0^{t_n} f(x)dx$ für jede Folge $(t_n) \subset \mathbb{R}$ mit $t_n \to \infty$ zu zeigen.)

(c) Die Funktion f ist nicht Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 49 **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie

$$\int_{[0,1)} f d\lambda.$$

Aufgabe 50* **(4* Punkte)**

Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ein positives Maß, so dass $\mu(Q) = \lambda(Q)$ für jeden offenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass $\mu = \lambda$ ist.
(Hinweis: Benutzen Sie die Definition des Lebesgue-Maßes λ, um zunächst $\mu(A) \le \lambda(A)$ für jede Borelmenge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen.)

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre