UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 11 Abgabetermin: Montag, 23.1.2006

Aufgabe 51 (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \geq 0 \text{ und } x \leq y < x+1 \\ -1 & , \text{ falls } x \geq 0 \text{ und } x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktionen $f(x,\cdot)$ $(x \in \mathbb{R})$ und $f(\cdot,y)$ $(y \in \mathbb{R})$ liegen in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, auch die Funktionen $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda(y)$ und $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda(x)$ liegen in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda(x) \right) d\lambda(y).$$

Wieso ist dies kein Widerspruch zum Satz von Fubini (Satz 10.5) ?

Aufgabe 52 (3+2=5 Punkte)

(a) Beweisen Sie das folgende Resultat, das schon Archimedes (287(?)-212 v.Chr.) gefunden hat: Das Volumen des Segments eines Paraboloids

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in [0,h] \text{ und } y^2 + z^2 \leq \frac{r^2 x}{h}\} \quad (r,h > 0)$$

ist halb so groß wie das Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h. Wie verhält sich das Volumen eines Kegels mit Grundflächenradius r und Höhe h zu dem Volumen des Zylinders?

(b) Seien $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ und sei $T \subset \mathbb{R}^3$ der Torus, der durch Rotation der Kreisscheibe

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0 \text{ und } (x-R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie $\lambda(T)$.

Aufgabe 53 (2+2=4 Punkte)

Seien μ, ν und λ die Lebesgue-Maße auf R^k, R^{n-k} und R^n und seien $A \in \mathcal{B}(R^k)$, $B \in \mathcal{B}(R^{n-k})$ Borelmengen. Zeigen Sie:

(a) Haben A und B endliches Lebesgue-Maß, so ist $\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.
(Hinweis: Zeigen Sie zunaechst mit Hilfe geeigneter Quaderüberdeckungen von A und B, dass $A \times B$ eine Menge endlichen Lebesgue-Maßes ist.)

(b) Ist $\mu(A) = 0$, so ist auch $\lambda(A \times B) = 0$.

Sei im Folgenden τ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$.

Aufgabe 54 **(1+2+2=5 Punkte)**

Seien $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r < R$, sei $f : [r, R] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und sei $K = \{x \in \mathbb{R}^n;\ r \leq \|x\| \leq R\}$. Für festes $N \in \mathbb{N}^*$ bezeichne $T = T(N) = (t_k)_{k=0}^N$ die durch

$$t_k = r + \frac{k}{N}(R - r) \quad (k = 0, \ldots, N)$$

definierte Teilung des Intervalls $[r, R]$. Zeigen Sie nacheinander:

(a) Für jedes $k = 1, \ldots, N$ gibt es einen Punkt $\xi_k \in]t_{k-1}, t_k[$ mit

$$t_k{}^n - t_{k-1}{}^n = n\xi_k^{n-1}(t_k - t_{k-1}).$$

(b) Sei $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n;\ t_{k-1} < \|x\| \leq t_k\}$ $(k = 1, \ldots, N)$ und $f_N = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)\chi_{A_k}$. Es gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_N d\lambda = n\tau_n \int_r^R f(t)t^{n-1}dt.$$

(c) Es ist

$$\int_K f(\|x\|)d\lambda = n\tau_n \int_r^R f(t)t^{n-1}dt.$$

Aufgabe 55* **(3* Punkte)**

Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der Durchschnitt der beiden (unendlich langen) Zylinder

$$Z_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + z^2 \leq 1\} \text{ und } Z_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie $\lambda(K)$.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/∼ag-eschmeier/lehre