UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 12 Abgabetermin: Montag, 30.1.2006

Aufgabe 56 (2+2=4 Punkte)

(a) Für $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sei

$$P(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=1}^{n} t_i v_i;\ 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

das *von* $v_1, \dots, v_n$ *aufgespannte Parallelotop*. Zeigen Sie:

$$\lambda\,(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|.$$

Hierbei sei $(v_1, \dots, v_n) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$.

(b) Zeigen Sie für alle $a = (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $b \in \mathbb{R}$:

$$\lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b\}\right) = 0.$$

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $b = 0$.)

Aufgabe 57 (2+3=5 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ eine positiv definite Matrix und

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ ax^2 + 2bxy + cy^2 \leq z \leq 1\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P \subset \mathbb{R}^3$ kompakt ist.

(b) Berechnen Sie das Volumen von P.

(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass eine symmetrische Matrix $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$ existiert. Betrachten Sie die quadratische Form der Matrix $A = B^2$.)

Aufgabe 58 **(4 Punkte)**

Es bezeichne $K_n = K_n(1)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$F_\alpha : K_n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \|x\|^{-\alpha} & ;\quad x \neq 0 \\ 0 & ;\quad x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$F_\alpha \in \mathcal{L}^1(\lambda|_{K_n}) \ \Leftrightarrow\ \alpha < n$$

gilt und berechnen Sie in diesem Fall das Integral

$$\int_{K_n} F_\alpha d\lambda.$$

(Hinweis: Aufgabe 54)

Aufgabe 59 **(2+2+1=4 Punkte)**

(a) Seien $n, m \in \mathbb{N}^*$ mit $m > n$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Lebesgue-Nullmengen sind:

- $\partial K_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^n \quad (r > 0)$
- $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2,\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
- $V + b = \{x + b;\ x \in V\} \subset R^n$, falls V ein Untervektorraum von R^n der Dimension $k < n$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ist.

(c) Sei $m < n$. Geben Sie ein Beispiel für eine Lebesgue-Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : R^n \to \mathbb{R}^m$, so dass $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ keine Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 60* **(2^*+2^*+1^*=5^* Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\int_X fg d\mu = 0$ für jede beschränkte μ-messbare Funktion $g : X \to \mathbb{C}$, so ist $f = 0$ μ-fast überall.
(Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Funktion g.)

(b) Ist $\int_X fg d\mu = 0$ für jede Treppenfunktion $g \in \mathrm{St}(\mu, \mathbb{C})$, so ist $f = 0$ μ-fast überall.
(Hinweis: Benutzen Sie, dass man jede beschränkte μ-messbare Funktion im geeigneten Sinne durch Treppenfunktionen approximieren kann.)

(c) Ist $\int_A f d\mu = 0$ für jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$, so ist $f = 0$ μ-fast überall.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre