UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 13 Abgabetermin: Montag, 6.2.2006

Aufgabe 61 *(Zylinderkoordinaten)* **(4 Punkte)**

Wir betrachten die Funktion

$$\varrho : (0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \varrho(r,\varphi,h) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h).$$

Zeigen Sie für eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \text{Die Funktion} \\ (0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ (r,\varphi,h) \mapsto r \cdot f\left(\varrho(r,\varphi,h)\right) \\ \text{liegt in } \mathcal{L}^1\left((0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}\right). \end{cases}$$

In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \int_{[0,2\pi]} \int_{(0,\infty)} r \cdot f\left(\varrho(r,\varphi,h)\right) d\lambda(r) d\lambda(\varphi) d\lambda(h).$$

Aufgabe 62 **(3×2=6 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_M (x^2y - y^3x) d\lambda(x,y)$ mit $M = \{(x,y) \in (0,\infty)^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$.

(b) $\int_M \sqrt{x^2+y^2+z^2} d\lambda(x,y,z)$ mit $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ $(R > 0)$.

(c) $\int_M ye^{x+z} d\lambda(x,y,z)$ mit $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x,y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1 \text{ und } |z| \le 2\}$.

Aufgabe 63 **(4 Punkte)**

Für $t > 2$ sei $K_t \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$K_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4 \le x^2+y^2 \le t^2 \text{ und } 0 \le y \le x\}.$$

Skizzieren Sie K_t und berechnen Sie

$$\lim_{t\to\infty} \int_{K_t} \frac{x-y}{(x^3+x^2y+xy^2+y^3) \cdot \log^2(x^2+y^2)} d\lambda(x,y).$$

Aufgabe 64 **(4 Punkte)**

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x, y, z) = x^2 + xy - y - z \text{ und } g(x, y, z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist, und dass

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(t) = (t, t^2, t^3)$$

eine globale Parametrisierung von M ist.

Aufgabe 65* **(2*+2*=4* Punkte)**

Für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^3$ und eine integrierbare Funktion $\mu : K \to [0, \infty)$, die als *spezifische Dichte* des Körpers K interpretiert werde, definieren wir die *Masse* des Körpers (K, μ) durch

$$m = m(K, \mu) = \int_K \mu(x) d\lambda(x).$$

Ist außerdem eine Gerade $L \subset \mathbb{R}^3$ gegeben, so sei

$$\theta = \theta(K, \mu, L) = \int_K \operatorname{dist}(x, L)^2 \mu(x) d\lambda(x)$$

das *Trägheitsmoment* des Körpers (K, μ) bezüglich der Achse L.

(a) Sei $K = \{x \in R^3;\ \|x\| \leq R\}$ eine Kugel mit Radius $R > 0$ und konstanter Dichte $\mu > 0$. Berechnen Sie die Masse von (K, μ) und das Trägheitsmoment von (K, μ) bezüglich einer Achse L, die durch den Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ von K geht, zum Beispiel sei L die x_1-Achse.

(b) Berechnen Sie für den Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ |x| \leq a,\ y^2 + z^2 \leq r^2\}$ $(a, r > 0)$ mit konstanter Dichte $\mu > 0$ die Masse und das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse.

In den Übungen können Sie sich ab sofort zur Klausur anmelden. Beachten Sie dazu folgende Hinweise:

1. Die Klausur findet **am 18.2.2006 von 9:00 bis 12:00 im Hörsaal I** statt.
2. Bitte klären Sie mit Ihrem Übungsgruppenleiter, ob Sie zur Klausur zugelassen sind.
3. Als Hilfsmittel zur Klausur dürfen Sie ein (beidseitig) von Hand beschriebenes DIN A4 Blatt benutzen.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre