



Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2005/2006

Blatt 14

Abgabetermin: Montag, 13.2.2006

Aufgabe 66

(4 Punkte)

Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned}f_1(x_1, \dots, x_4) &= x_1x_3 - x_2^2 \\f_2(x_1, \dots, x_4) &= x_2x_4 - x_3^2 \\f_3(x_1, \dots, x_4) &= x_1x_4 - x_2x_3.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}; f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit der Dimension $p \geq 1$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$). Eine Menge $A \in \mathcal{B}(M)$ heißt Nullmenge, falls für jede Karte $\mathbb{R}^p \supset \Omega \xrightarrow{g} V \subset M$ gilt: $\lambda(\bar{g}^{-1}(A)) = 0$.

Aufgabe 67

(1+3=4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit der Dimension $p \geq 1$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$). Zeigen Sie:

(a) Sind $A_k \subset M$ Nullmengen für $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ eine Nullmenge.

(b) Ist M kompakt und $A \in \mathcal{B}(M)$, so existieren endlich viele Karten

$$\mathbb{R}^p \supset \Omega_i \xrightarrow{g_i} V_i \subset M \quad (i = 1, \dots, r)$$

mit $A \subset \bigcup_{i=1}^r V_i$ und A ist dann genau dann eine Nullmenge, wenn $\lambda(\bar{g}_i^{-1}(A)) = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$ gilt.

(Hinweis: Wenden Sie Satz 11.4 auf geeignete Kartenwechsel an.)

Aufgabe 68*

(2*+2*=4* Punkte)

Für $r > 0$ und $n \geq 2$ sei $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = r\}$. Zeigen Sie:

(a) $S_{n-1}(r)$ ist eine kompakte C^∞ -Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$. Man kann $S_{n-1}(r)$ durch $2n$ Karten überdecken.

(b) Die Mengen

$$N_i = \{x \in S_{n-1}(r); x_i = 0\} \subset S_{n-1}(r) \quad (i = 1, \dots, n)$$

sind Nullmengen.

Aufgabe 69***(4* Punkte)**

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ die abgeschlossene euklidische Kugel mit Radius 1 um $(1, 0, 0)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_K \frac{\sqrt{x}}{x^2 + y^2 + z^2} d\lambda(x, y, z).$$

(Hinweis: Benutzen Sie Satz 11.13 (Räumliche Polarkoordinaten) und berechnen Sie zunächst die Menge $\varrho^{-1}(K)$ für die dort gegebene Transformation ϱ .)

Aufgabe 70***(3* + 1*=4* Punkte)**

- (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter Körper mit der spezifischen Dichte $\mu : K \rightarrow [0, \infty)$ und der Masse $m > 0$ (vergleiche Aufgabe 65). Der *Schwerpunkt* $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ von K ist durch

$$s_i = \frac{1}{m} \int_K x_i \mu(x) d\lambda(x) \quad (i = 1, 2, 3)$$

definiert. Beweisen Sie den *Satz von Steiner*:

Ist $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade durch S und L' eine zu L parallele Gerade im Abstand $d \geq 0$ und sind θ_L beziehungsweise $\theta_{L'}$ die Trägheitsmomente des Körpers (K, μ) bezüglich dieser Achsen, so gilt

$$\theta_{L'} = \theta_L + md^2.$$

- (b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel aus Aufgabe 65 (a) um die Achse

$$L = \{(0, 2R, 0) + \alpha(1, 0, 0); \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

In den Übungen können Sie sich ab sofort zur Klausur anmelden. Beachten Sie dazu folgende Hinweise:

1. Die Klausur findet **am 18.2.2006 von 9:00 bis 12:00 im Hörsaal I** statt.
 2. Bitte klären Sie mit Ihrem Übungsgruppenleiter, ob Sie zur Klausur zugelassen sind.
 3. Als Hilfsmittel zur Klausur dürfen Sie ein (beidseitig) von Hand beschriebenes DIN A4 Blatt benutzen.
-

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

<http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre>