UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 15 Abgabetermin: -

Dieses Übungsblatt soll der Vorbereitung auf die Klausur dienen. Sie sollten deshalb jede Aufgabe selbständig bearbeiten! Ihre Lösungen werden nicht korrigiert, und es werden keine Punkte vergeben.

Aufgabe 71

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - y' - 6y = (6x-7)e^x,\ y(0) = 2 + e^2,\ y(1) = 1 + e^3.$$

Aufgabe 72

Bestimmen sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 1 - y^2$$

mit

(a) $y(0) = 0$ (b) $y(0) = 1$ (c) $y(0) = 2$.

Aufgabe 73

Sei $\mathcal{F} = \{(x, x+1];\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ das System aller nach links halboffenen Intervalle der Länge 1. Bestimmen Sie die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 74

Sei X eine überabzählbare Menge. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A} = \{A \subset X;\ A \text{ abzählbar oder } X \setminus A \text{ abzählbar}\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra.

(b) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty), \mu(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & , \text{ falls } A \text{ überabzählbar} \end{cases}$ ist ein Maß.

Aufgabe 75

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_{[0,\infty)} f d\lambda$.

Aufgabe 76

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x} & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}^*$ (Lebesgue-)integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\int_{[0,\pi]} f_n d\lambda\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 77

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$), so dass $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2;\ f(x) \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^3$$

(Borel-)messbar ist und bestimmen Sie $\lambda(K)$.

Aufgabe 78

Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $r, a_1, \ldots, a_n > 0$. Wir bezeichnen mit $\tau_n = \lambda(K_n)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$. Begründen Sie, dass das Ellipsoid

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt ist und bestimmen Sie $\lambda(E)$ in Abhängigkeit von τ_n.

Aufgabe 79

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$. Zeigen Sie, dass f (Lebesgue-)integrierbar ist mit

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda = \pi.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Polarkoordinaten und den Satz von der monotonen Konvergenz.)
Folgern Sie daraus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 80

Bestimmen Sie das 2-dimensionale Volumen $\mathrm{Vol}_2(M)$ der Rotationsfläche

$$M = \{(x, y, z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}^2;\ y^2 + z^2 = \cos^2 x\}.$$

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre