



Übungen zur Vorlesung Analysis III  
Wintersemester 2005/2006

Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 7.11.2005

---

**Aufgabe 6** (2+2=4 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Anfangswertproblemen maximale Lösungen an.

(a)  $y' = \frac{y^2+y}{t}$ ,  $y(1) = -\frac{1}{2}$ .

(b)  $y' = \frac{e^{-y^2}}{y(2t+t^2)}$ ,  $y(1) = 1$ .

---

**Aufgabe 7** (2+2=4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

(a)  $y' + y \sin t = \sin 2t$ .

(b)  $y' - 3y \tan t = 1$ .

---

**Aufgabe 8** (2+2=4 Punkte)

(a) Erraten Sie eine Lösung des Anfangswertproblems  $y' = ty + 1 - t^2$ ,  $y(0) = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}$  und zeigen Sie, dass diese Lösung eindeutig ist.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad y' = ty + 1 - t^2.$$

(Hinweis: Die Differenz zweier Lösungen von (1) löst die homogene DGL  $y' = ty$ .)

---

**Aufgabe 9** (2+2=4 Punkte)

(a) Sei  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall  $J \subset \mathbb{R}$  mit  $f(y) \neq y$  für alle  $y \in J$ . Finden Sie zu der Differentialgleichung

$$(1) \quad y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad (t > 0)$$

eine Differentialgleichung (2) mit getrennten Variablen, so dass gilt:

$$\varphi \text{ löst (1)} \Leftrightarrow u \text{ mit } u(t) = \frac{\varphi(t)}{t} \text{ löst (2).}$$

(b) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2} \quad (t > 0).$$

---

**Aufgabe 10\*****(4\* Punkte)**

Versuchen Sie eine Lösung  $y = y(x)$  des Anfangswertproblems

$$(*) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

zu finden, indem Sie für  $y$  den Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

machen. Leiten Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten  $a_k$  her und ermitteln Sie daraus einen geschlossenen Ausdruck für  $a_k$ . Begründen Sie anschliessend, dass die so erhaltene Potenzreihe auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergiert und  $y$  tatsächlich  $(*)$  löst.

---

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

**<http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre>**