UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 2 Abgabetermin: Montag, 7.11.2005

Aufgabe 6 (2+2=4 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Anfangswertproblemen maximale Lösungen an.

(a) $y' = \frac{y^2+y}{t},\ y(1) = -\frac{1}{2}$.

(b) $y' = \frac{e^{-y^2}}{y(2t+t^2)},\ y(1) = 1$.

Aufgabe 7 (2+2=4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

(a) $y' + y \sin t = \sin 2t$.

(b) $y' - 3y \tan t = 1$.

Aufgabe 8 (2+2=4 Punkte)

(a) Erraten Sie eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = ty + 1 - t^2,\ y(0) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass diese Lösung eindeutig ist.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad y' = ty + 1 - t^2.$$

(Hinweis: Die Differenz zweier Lösungen von (1) löst die homogene DGL $y' = ty$.)

Aufgabe 9 (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $f(y) \neq y$ für alle $y \in J$. Finden Sie zu der Differentialgleichung

$$(1) \quad y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad (t > 0)$$

eine Differentialgleichung (2) mit getrennten Variablen, so dass gilt:

$$\varphi \text{ löst } (1) \Leftrightarrow u \text{ mit } u(t) = \frac{\varphi(t)}{t} \text{ löst } (2).$$

(b) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2} \quad (t > 0).$$

Aufgabe 10* **(4* Punkte)**

Versuchen Sie eine Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems

$$(*) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2}$$

zu finden, indem Sie für y den Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

machen. Leiten Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_k her und ermitteln Sie daraus einen geschlossenen Ausdruck für a_k. Begründen Sie anschliessend, dass die so erhaltene Potenzreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert und y tatsächlich $(*)$ löst.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre