UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 3 Abgabetermin: Montag, 14.11.2005

Aufgabe 11 (2+2+2=6 Punkte)

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $y' = Ay$ besitze die Lösung $\binom{\varphi_1}{\varphi_2} : I \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.
Zeigen Sie: Hat man Lösungen $v : I \to \mathbb{R}$ von $v' = \left(a_{22} - a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) v$ und $u : I \to \mathbb{R}$ von $u' = \frac{a_{12}}{\varphi_1} v$, so erhält man durch

$$\psi(x) = u(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v(x) \end{pmatrix}$$

eine weitere Lösung von $y' = Ax$. Diese ist dann linear unabhängig zu φ, falls $v \not\equiv 0$.

(b) Man bestimme alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + \frac{1}{x} y_2 \\ y_2' &= (1-x) y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Hinweis: Eine Lösung ist $\varphi(x) = \binom{1}{x}$.

(c) Man bestimme alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + \frac{1}{x} y_2 + \log x + \frac{1}{x} \\ y_2' &= (1-x) y_1 + y_2 + (x-1)\log x \end{aligned}$$

über $I = (0, \infty)$.

Aufgabe 12 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung φ der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x+2 \\ 3x-1 \end{pmatrix}$$

mit $\varphi(0) = 0$.
Sie können dazu den folgenden Satz benutzen:
Gibt es zu der Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ so bilden die Funktionen

$$\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n;\ \varphi_k(x) = a_k e^{\lambda_k x}$$

ein Fundamentalsysytem von Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Seien $g, h : G \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 \notin h(G)$. Die Differentialgleichung $y' = -\frac{g(t,y)}{h(t,y)}$ heißt exakt*, falls eine Funktion $F \in C^1(G)$ mit $g = \frac{\partial F}{\partial t}$ und $h = \frac{\partial F}{\partial y}$ existiert.*

Aufgabe 13 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Sei $y' \overset{(*)}{=} -\frac{g(t,y)}{h(t,y)}$ eine exakte Differentialgleichung. Zeigen Sie: Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ löst $(*)$ genau dann, wenn $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ konstant ist.

(b) Sei $G = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2;\ t \neq 1 \text{ und } 2y \neq t\}$ und $f : G \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, y) = \left(y - \frac{1}{t-1}\right)(2y - t)^{-1}.$$

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y),\ y(0) = -1.$$

Aufgabe 14 **(2+2=4 Punkte)**

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

(a) $y'' + y' - 2y = 0.$

(b) $y'' + y' - 2y = 4e^{2t}.$

Eine Funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ $(r \in (0, \infty])$ heißt gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ und* ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in (-r, r)$ gilt.*

Aufgabe 15* **(4* Punkte)**

Seien $a, b : (-r, r) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen $(r > 0)$ so, dass a ungerade und b gerade ist. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen besitzt, dass aus einer geraden und einer ungeraden Funktion besteht.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre