



Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2005/2006

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 21.11.2005

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$). Man sagt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert gegen ein $x \in X$, falls $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x_n = x$ gilt und konvergiert absolut, falls $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ gilt.

Aufgabe 16

(4 Punkte)

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie: X ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe in X konvergiert.

Aufgabe 17

(2+2=4 Punkte)

- (a) Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Eine Funktion $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung von

$$(1) \quad y'' + \frac{a}{t}y' + \frac{b}{t^2}y = 0,$$

wenn die Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = \varphi(e^x)$ eine Lösung von

$$(2) \quad y'' + (a-1)y' + by = 0$$

ist.

- (b) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

(i) $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$

(ii) $y'' + \frac{3}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = 0$

Aufgabe 18

(1+2=3 Punkte)

Wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem

$$(I) \quad y' = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} y.$$

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen von (I) über $\mathbb{C}$.

- (b) Bestimmen Sie alle Lösungen von (I) über $\mathbb{R}$.

Hinweis: Geeignete $\mathbb{C}$ -Linearkombinationen von $\varphi_j(x) = e^{\lambda_j x} a_j$ ($j = 1, 2$) sind reellwertig, falls λ_1 und λ_2 sowie a_1 und a_2 konjugiert komplex zueinander sind.

Aufgabe 19**(2+1+2=5 Punkte)**Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$.

- (a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A und $x \in \ker(A - \lambda)^j$ ($j \geq 1$), so ist die Funktion

$$\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi_x(t) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t} (A - \lambda)^k x$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay$ mit $\varphi_x(0) = x$.

- (b) Für $i = 1, \dots, n$ sei $x_i \in \ker(A - \lambda_i)^{j_i}$ ($j_i \geq 1$, λ_i Eigenwert von A), so dass $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ ist. Zeigen Sie, dass $(\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n})$ ein Lösungsfundamentalsystem von $y' = Ay$ ist.

- (c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 20***(4* Punkte)**

Es seien $m, D > 0$ und $\alpha \geq 0$. Wir betrachten die Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator:

$$(1) \quad mx'' + \alpha x' + Dx = 0$$

Berechnen Sie ein reelles Lösungsfundamentalsystem von (1). Finden Sie eine Lösung mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$ und skizzieren Sie diese.

(Hinweis: Fallunterscheidung)

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

<http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre>