UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 5 Abgabetermin: Montag, 28.11.2005

Aufgabe 21 (1+1+2=4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Es sei

$$d_A : X \to [0, \infty),\ d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

die *Abstandsfunktion* zu A. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

(b) d_A ist stetig.

(c) Für $x \in X$ gilt: $d_A(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A}$.

Für $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ und $Y \subset X$ sei

$$\mathcal{M}|_Y = \{A \cap Y;\ A \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

Aufgabe 22 (1+2+1+1=5 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\emptyset \neq Y \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}|_Y$ ist eine σ-Algebra auf Y.

(b) Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{E}|_Y$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}|_Y$.

(c) Ist d eine Metrik auf X, so ist $d|_{Y \times Y}$ eine Metrik auf Y und für $V \subset Y$ gilt:

$$V \subset (Y, d|_{Y \times Y}) \text{ offen } \;\Leftrightarrow\; \exists U \subset (X, d) \text{ offen mit } V = U \cap Y.$$

(d) Ist d eine Metrik auf X und $\mathcal{A}$ die Borelsche σ-Algebra auf (X, d), so ist $\mathcal{A}|_Y$ die Borelsche σ-Algebra auf $(Y, d|_{Y \times Y})$.

Aufgabe 23 **(4∗1=4 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $f, g, f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ messbare Funktionen. Die Folge f_n sei punktweise beschränkt, das heißt für alle $x \in X$ existiere ein $C_x \geq 0$ mit $|f_n(x)| \leq C_x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass auch die folgenden Funktionen messbar sind.

$$\begin{aligned}
\max(f,g) : X \to \mathbb{R} \quad &, \quad x \mapsto \max(f(x), g(x)) \\
\sup_n f_n : X \to \mathbb{R} \quad &, \quad x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \\
\limsup_n f_n : X \to \mathbb{R} \quad &, \quad x \mapsto \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \\
\lim_n f_n : X \to \mathbb{R} \quad &, \quad x \mapsto \begin{cases} \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) & , \quad \text{falls dieser Limes existiert} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Beachten Sie dabei, dass diese Aussagen richtig bleiben, wenn man *max* und *sup* durch *min* und *inf* ersetzt.

Aufgabe 24 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie

(a) Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(b) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, so gilt

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{M \in S_k^{(n)}} (-1)^{k+1} \mu\left(\bigcap_{i\in M} A_i\right),$$

wobei $S_k^{(n)}$ die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ sei.

Aufgabe 25* **(4* Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$. Wir betrachten die Menge

$$M = \{x \in X;\ x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass $M \in \mathcal{A}$ und $\mu(M) = 0$ gilt.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/∼ag-eschmeier/lehre