UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 6 Abgabetermin: Montag, 5.12.2005

Sei X eine Menge und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(X)$. Man definiert

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X;\ x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X;\ x \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Folge $(A_n)_n$ heißt konvergent*, falls $\limsup_n A_n = \liminf_n A_n (=: \lim_n A_n)$ gilt.*

Aufgabe 26 (4∗1=4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

(b) $\mu(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(c) $\mu(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$, falls $\mu(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n) < \infty$.

(d) Ist A_n konvergent und $\mu(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n) < \infty$, so gilt $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Aufgabe 27 (6∗1=6 Punkte)

Sei X eine Menge und seien $A, A_n, B \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

(a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

(c) $\chi_{A\cap B^c} = \chi_A(1 - \chi_B)$.

(d) $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$.
Dabei sei $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ die *symmetrische Differenz* von A und B.

(e) $\chi_{\limsup A_n} = \limsup \chi_{A_n}$.

(f) $\chi_{\liminf A_n} = \liminf \chi_{A_n}$.

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Seien $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $F_1 \times \ldots \times F_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 29 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt, so gibt es eine Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ von einfachen Funktionen $f_k : X \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig auf X gegen f konvergiert.

(b) Ist $f : X \to [0, \infty)$ messbar, so gibt es eine Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ von einfachen Funktionen $f_k : X \to [0, \infty)$, die punktweise monoton wachsend gegen f konvergiert, das heißt es gilt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ und } f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$$

für alle $x \in X$ und $j \geq 1$.

(Hinweis: Beweis von Satz 5.14)

Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt vollständig, *wenn zu $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und $M \subset N$ auch $M \in \mathcal{A}$ gilt.*

Aufgabe 30* **(1*+1*+2*+1*=5* Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und

$$\mathcal{A}_0 = \{M \subset X;\ \text{es gibt ein } N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0 \text{ und } M \subset N\}.$$

das System aller Teilmengen von μ-Nullmengen. Man definiert

$$\hat{\mathcal{A}} = \{A \cup M;\ A \in \mathcal{A} \text{ und } M \in \mathcal{A}_0\},$$
$$\hat{\mu} : \hat{\mathcal{A}} \to [0, \infty],\ \ \hat{\mu}(A \cup M) = \mu(A)\ \ (A \in \mathcal{A}, M \in \mathcal{A}_0).$$

Zeigen Sie:

(a) $\hat{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra auf X.

(b) $\hat{\mu}$ ist ein wohldefiniertes Maß auf $(X, \hat{\mathcal{A}})$.

(c) $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ ist die *minimale vollständige Erweiterung* von $\mathcal{A}$, das heißt:

- $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ ist vollständig mit $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$ und $\hat{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.
- Ist $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ und $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$, so folgt $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ und $\nu|_{\hat{\mathcal{A}}} = \hat{\mu}$.

(d) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist genau dann vollständig, wenn $\mathcal{A} = \hat{\mathcal{A}}$ ist.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre