UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 7 Abgabetermin: Montag, 12.12.2005

Aufgabe 31 **(1+3=4 Punkte)**

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, E ein Banachraum und μ ein endliches Borelmaß auf X. Zeigen Sie für eine stetige Funktion $f : X \to E$.

(a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_r \in X$ mit

$$f(X) \subset B_\varepsilon\left(f(x_1)\right) \cup \ldots \cup B_\varepsilon\left(f(x_1)\right).$$

(b) f ist μ-messbar.
(Hinweis: Approximieren Sie f mit Hilfe von (a) punktweise durch eine Folge von Treppenfunktionen.)

Aufgabe 32 **(3 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $x \in X$ und $\delta_x : \mathcal{A} \to [0, 1],\ A \mapsto \chi_A(x)$ das *Dirac-Maß* zu x. Sei E ein Banachraum. Bestimmen Sie $\mathcal{L}^1(\delta_x, E)$ und berechnen Sie $\int_X f d\delta_x$ für $f \in \mathcal{L}^1(\delta_x, E)$.

Aufgabe 33 **(1+3+2=6 Punkte)**

Sei $X = \mathbb{N},\ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das *Zählmaß* auf $\mathcal{A}$, das heißt

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty],\ \mu(A) = \begin{cases} \#A & , \text{ falls } A \text{ endlich} \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Treppenfunktion, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $f(n) = 0$ für alle $n > n_0$. In diesem Fall ist

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{n_0} f(n).$$

(b) Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

(c) Es gilt

$$\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty\}.$$

Aufgabe 34 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty)$ eine μ-messbare Funktion. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ für $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(x) = \lim_n g_n(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ ist.
(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 29, um zunächst eine Folge einfacher Funktionen zu erhalten, die punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert.)

(b) Es gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; S := \sup\{\int_X g d\mu;\; g \in \mathrm{St}(\mu, \mathbb{R}) \text{ mit } 0 \leq g \leq f \;\; \mu - \text{f.ü.}\}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_X f d\mu = S.$$

Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt σ-endlich*, falls es $A_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $X = \bigcup_n A_n$ gilt.*

Aufgabe 35* **(1*+3*=4* Punkte)**

(a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $(Y, \mathfrak{B})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie: Sind $f, g : X \to Y$ Abbildungen mit $f = g$ μ-fast überall, so gilt:

$$f \text{ messbar } \Leftrightarrow g \text{ messbar}.$$

(b) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, und $(X, \hat{A}, \hat{\mu})$ die mimimale vollständige Erweiterung, so gilt für eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$:

$$f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R} \text{ ist } \mu - \text{messbar } \Leftrightarrow\; f : (X, \hat{A}) \to R \text{ ist Borel-messbar.}$$

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre