UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 8 Abgabetermin: Montag, 19.12.2005

Aufgabe 36 (3+1=4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Banachraum über $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$. Zeigen Sie für eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$.

(a) Ist $f : X \to k$ μ-messbar und existiert eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass $f|_{X \setminus N}$ beschränkt ist, so ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{\infty, X \setminus N} \cdot \|g\|_1.$$

(b) Die Behauptung in (a) bleibt richtig, wenn man die Voraussetzung, dass f μ-messbar ist, ersetzt durch die Bedingung, dass f Borel-messbar ist.

Aufgabe 37 (3+1=4 Punkte)

Sei $R = \prod_{\nu=1}^{n} [a_\nu, b_\nu]$ ein kompakter Quader im $\mathbb{R}^n$.

(a) Für $\nu = 1, \ldots, n$ sei $T_\nu = (t_{\nu,i})_{1 \leq i \leq r_\nu}$ eine Teilung von $[a_\nu, b_\nu]$. Weiterhin sei

$$I = \prod_{\nu=1}^{n} \{1, \ldots, r_\nu\} \text{ und } R_i = \prod_{\nu=1}^{n} [t_{\nu, i_\nu - 1}, t_{\nu, i_\nu}] \text{ für } i = (i_1, \ldots, i_n) \in I.$$

Zeigen Sie, dass $V(R) = \sum_{i \in I} V(R_i)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $V(S) \leq V(R)$ für jeden kompakten Quader $S \subset R$ gilt.

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Ein komplexes Maß *auf $(X, \mathcal{A})$ ist eine Abbildung $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $\nu(\emptyset) = 0$ und $\nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n)$ für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{A}$.*

Aufgabe 38 (2+1+1=4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\nu_f(A) = \int_A f d\mu \quad \left(:= \int_X f \cdot \chi_A \, d\mu \right) \qquad (A \in \mathcal{A})$$

wird ein komplexes Maß ν_f auf $(X, \mathcal{A})$ definiert.

(b) Jede μ-Nullmenge ist auch eine ν_f-Nullmenge.

(c) Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{A}$ mit $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\nu_f(A_k)| \leq \|f\|_1.$$

Aufgabe 39 **(3+1=4 Punkte)**

(a) Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit $\mu(\{t\}) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ für einen Banachraum E. (Wenn Sie möchten, können Sie sich auf den Fall $E = k(= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ beschränken.)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to E,\ F(x) = \int_{(-\infty,x]} f d_\lambda$$

stetig ist.
(Hinweis: Satz von der majorisierten Konvergenz)

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Aussage in (a) falsch wird, wenn man die Voraussetzung $\mu(\{t\}) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ fallen lässt.

Aufgabe 40* **(4* Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ nichtnegative Funktionen. Es gelte:

(i) $f_n \xrightarrow{n} f$ punktweise μ-fast überall.

(ii) $\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n} \int_X f d\mu$.

Zeigen Sie, dass $\int_X |f - f_n| d\mu \xrightarrow{n} 0$ gilt.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktionen

$$g_n = f - \sup_{k \geq n}(f - f_k)_+ \quad (n \in \mathbb{N})$$

in $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ liegen.)

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre